Zastosowania nauki

Tom 1

Matematyka i Informatyka

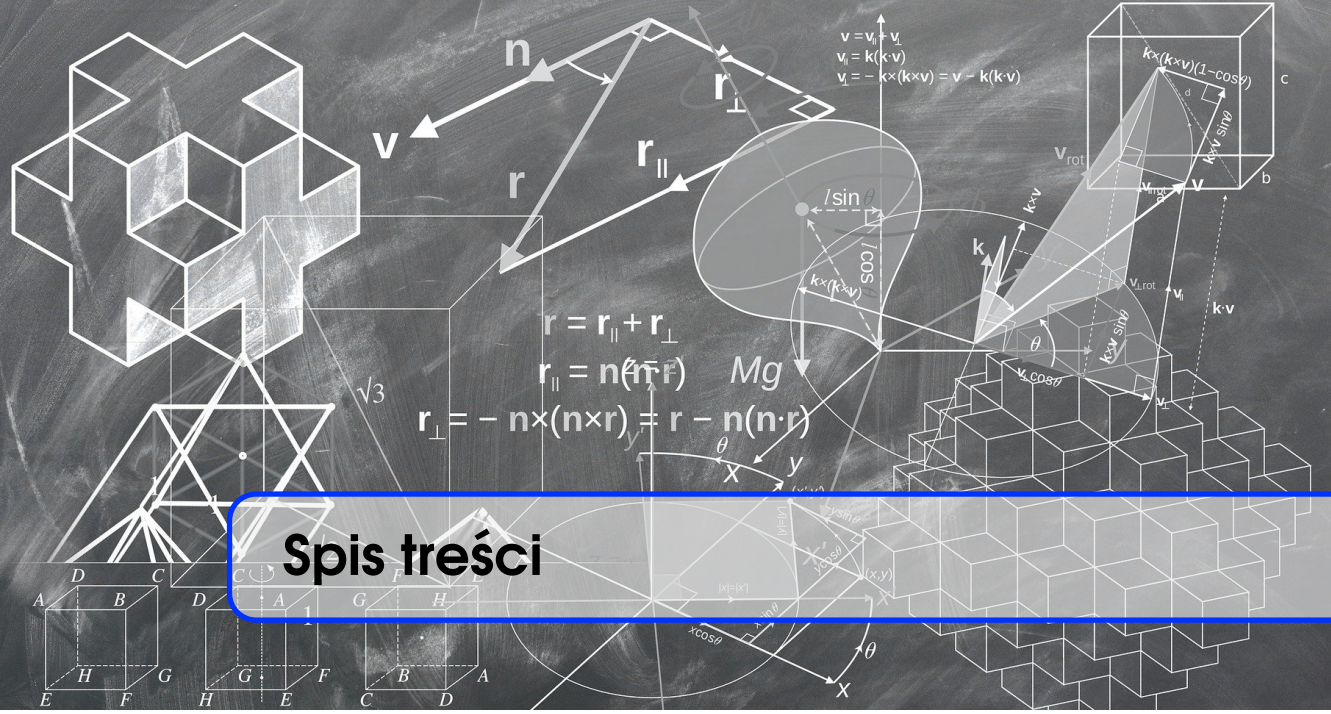
Norway
grants

Projekt pt.: **„MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA - Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli"**, o wartości 15 328 498,86 zł, realizowany jest w ramach Programu Rozwój Lokalny. Projekt dofinansowany został ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz ze środków Budżetu Państwa (15%). Projekt ma na celu poprawę rozwoju lokalnego i instytucjonalnego Stalowej Woli. Projektem zarządza Lider – Gmina Stalowa Wola.

Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.
www.norwaygrants.pl i www.norwaygrants.org

Materiały dydaktyczne opracowane w ramach projektu
"MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA –
Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli".

— Stalowa Wola, listopad 2022 —



Spis treści

Norway grants

Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).

Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

Norway grants

Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).

Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

1. Bryły bez kleju

Weronika Woś

1.1 Wstęp

Bardzo często zadaniem polecanym do wykonania jest zrobienie dowolnej bryły przez uczniów. Zazwyczaj jest ono wykonywane w ten sposób, że uczeń najpierw wybiera bryłę, którą chce zrobić, a następnie znajduje jej siatkę wraz z zakładkami. Zakładka schematu jest to, w tym wypadku, brzeg jednej ściany zachodzący na brzeg drugiej ściany, z którym jest połączona. Te dołączone do siatki zakładki są konieczne do tego, aby bryłę złożyć z użyciem kleju. Rysunek 1.1 pokazuje taką przykładową siatkę z zakładkami. Jest to schemat ostrosłupa ściętego o podstawie trójkątnej.

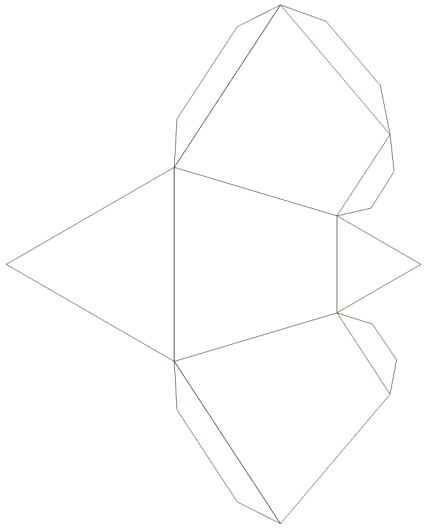
Czy da się jednak wykonać bryłę z papieru bez użycia kleju? Okazuje się, że tak!

Ten rozdział prezentuje kilka brył, które można złożyć z papieru, bez klejenia. Projekt o nazwie „Bryłki bez kleju" był realizowany przez autorkę tego rozdziału wraz ze studentami kierunku Zarządzanie i Inżynieria Produkcji zamiejscowego Wydziału Mechaniczno-Technologicznego Politechniki Rzeszowskiej im. Ignacego Łukasiewicza w Stalowej Woli. Celem projektu było sporządzenie pomocy naukowych dla uczniów szkół podstawowych i średnich w ramach prac koła naukowego. Zadanie polegało na zaprojektowaniu i wykonaniu schematów brył, które można złożyć bez użycia kleju. Efektem wspólnej pracy było osiem schema-

Norway grants

Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).

Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.



Rysunek 1.1: Przykład siatki z zakładkami

tów, które zaprezentowane są w tym rozdziale. Prace prowadzone były w programie obsługującym grafikę wektorową Inkscape. Jest to darmowy program do tworzenia grafiki wektorowej, który powstał w ramach projektu GNU. Pozwala na tworzenie przede wszystkim symboli, znaków towarowych i logotypów produktów, firm, stowarzyszeń oraz tworzenie ikon czy postaci komiksowych. Jest odpowiednikiem popularnego (płatnego) programu CorelDRAW.

Bryłki bez kleju mogą służyć jako materiały pomocnicze do nauki matematyki w szkołach. W szczególności na lekcjach z działu stereometria. Dlatego zachęcamy wszystkich uczniów, nie tylko wielbicieli matematyki, do zapoznania się z tymi schematami. Poza tym bryły bez kleju mogą być po prostu świetną zabawą.

1.2 Instrukcja wykorzystania schematów

W tej części przedstawione zostaną gotowe schematy brył. Przeznaczone są one do wykorzystania.

Definicja 1.1 — Zakładki. Każdy schemat składa się z kilku figur. Z tego niektóre figury są ścianami docelowej bryły. Pozostałe figury - to znaczy bez rysunków, bez loga wydziału oraz loga uczelni - służą jako tak zwane **zakładki**. To znaczy, że te fragmenty uzyskanej

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

kartki mają się znaleźć wewnątrz bryły. To właśnie te **zakładki** pełnią zasadniczą rolę w schemacie każdej bryły, ponieważ zastępują użycie kleju.

W celu wykonania gotowych brył - bez wykorzystania kleju - należy wybrać bryłę, a następnie wykonać kroki, jak opisano poniżej.

Ćwiczenie 1.1 Wykonaj następujące kroki:

1. skopiuj dany schemat - można to zrobić korzystając ze skanera lub ksera, można również skorzystać ze strony projektu Bryłki bez kleju, do której odnośnik jest podany niżej;
2. wydrukuj uzyskaną kopię - warto wykorzystać kolorowy papier o większej gramaturze (dla lepszego efektu);
3. następnie należy wyciąć figurę po jej zewnętrznym obrysie;
4. ponadto trzeba przeciąć pogrubione linie;
5. uzyskany kawałek papieru należy złożyć wzdłuż wszystkich linii - wszystkie zagięcia są w tym samym kierunku - do środka;
6. mając tak przygotowaną kartkę, składamy z niej bryłę, jednocześnie pamiętając, że zakładki mają się znaleźć wewnątrz.

Gotowe! ■

Kolejne schematy ułożone są wraz z rosnącą trudnością ich wykonania. Pierwsze cztery projekty $A - D$ są bardzo łatwe i można je śmiało zaproponować do wykonania nawet uczniom pierwszych klas szkoły podstawowej. Kolejne bryłki E, F oraz G też nie są trudne. Natomiast ostatni schemat przedstawia bryłę, której złożenie jest zdecydowanie trudniejsze. Jest to dwudziestościan foremny.

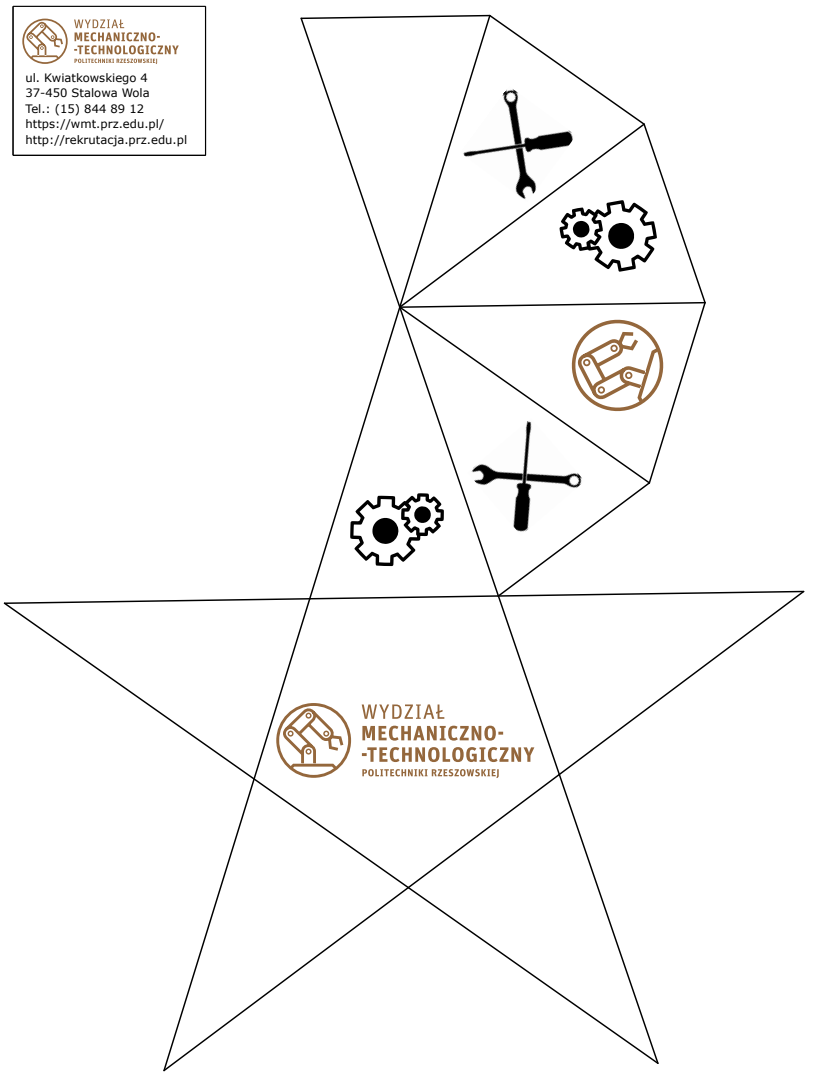
Definicja 1.2 — Dwudziestościan foremny (inaczej ikosaedr). Jest to najbardziej złożony wielościan foremny - o 20 ścianach - w kształcie przystających trójkątów równobocznych. Ma on 30 krawędzi i 12 wierzchołków oraz 15 płaszczyzn symetrii.

Zwróć uwagę, że ściany na schemacie są ponumerowane od 1 do 20. Ta numeracja nie jest przypadkowa. Pokazuje ona kolejność składania. Jeżeli wykonasz wszystkie kroki opisane w ćwiczeniu 1.2, to składanie kartki trzeba prowadzić zgodnie z numeracją ścian. W każdym wierzchołku styka się ze sobą pięć trójkątów. Najpierw należy złożyć dolną połowę bryły, która stworzy nam kształt miski. Następnie białe trójkąty, które pełnią rolę zakładek, układamy do środka bryły. W ostatnim kroku zamykamy górną połówkę. Filmik bryła H przedstawia te wszystkie kroki. Trzeba zaznaczyć, że ta bryła jest naprawdę trudna i nawet niektórzy studenci nie potrafili jej złożyć. Powodzenia!

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

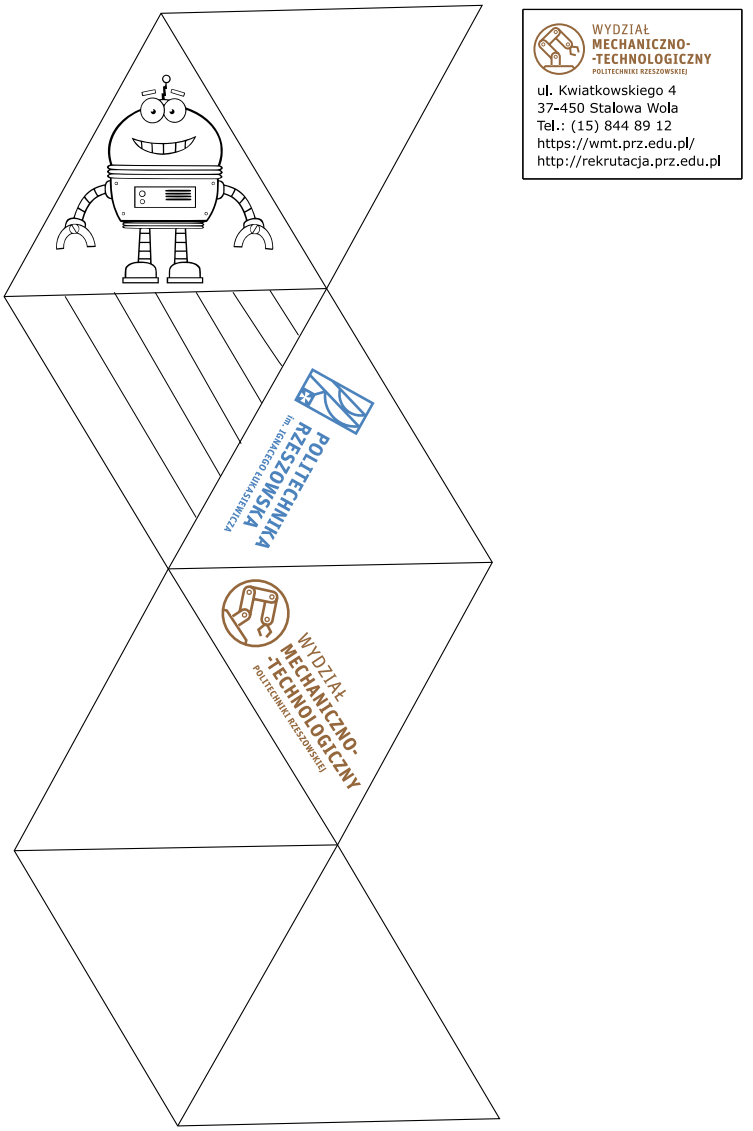
1.3 Gotowe schematy

Gotowe schematy można wydrukować z tej publikacji lub też pobrać ze strony: Strona projektu Bryłki bez kleju.

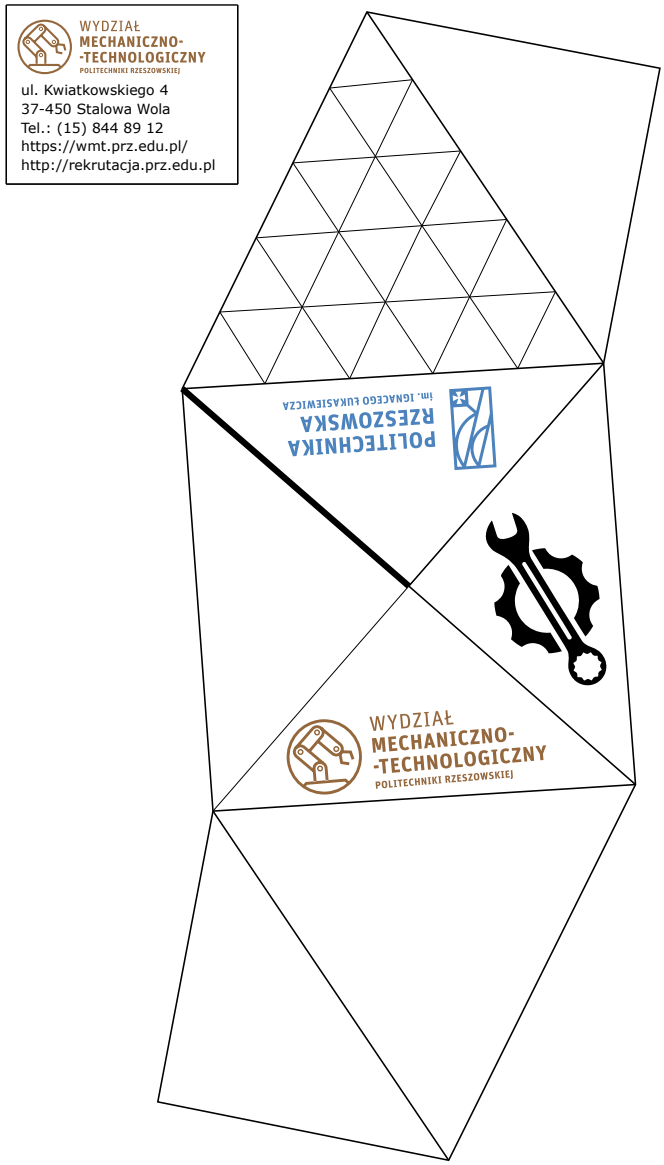


Rysunek 1.2: Schemat bryły A

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.



Rysunek 1.3: Schemat bryły B

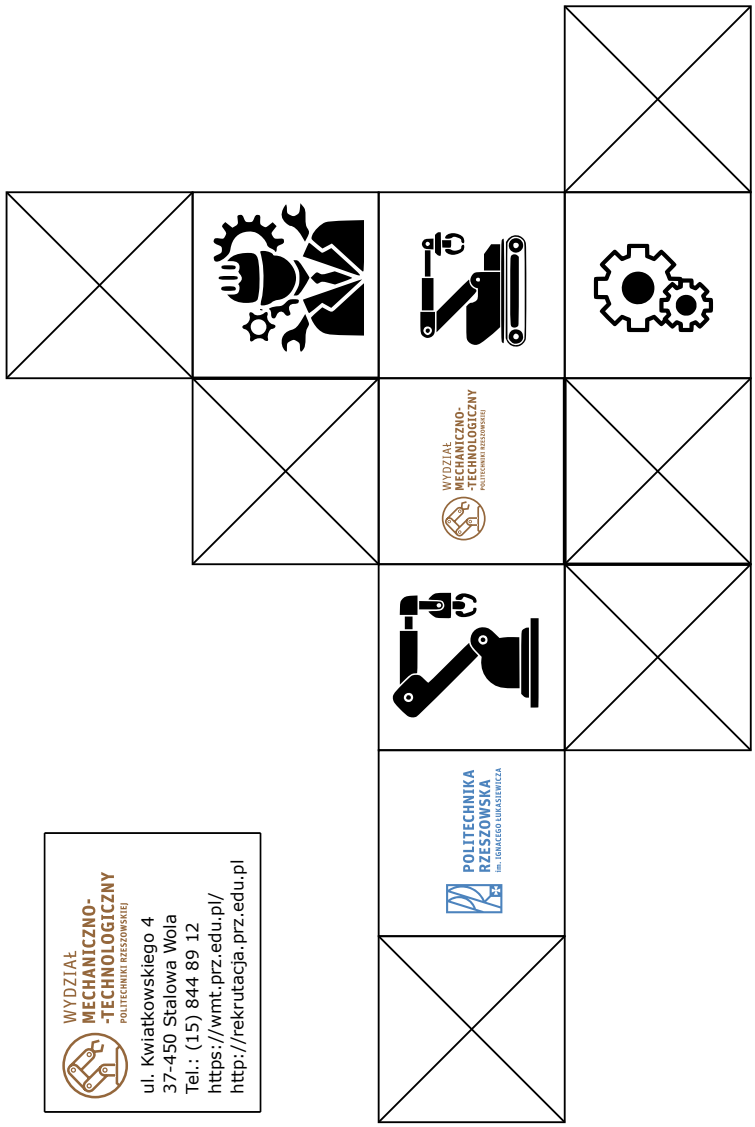


Rysunek 1.4: Schemat bryły C

Norway grants

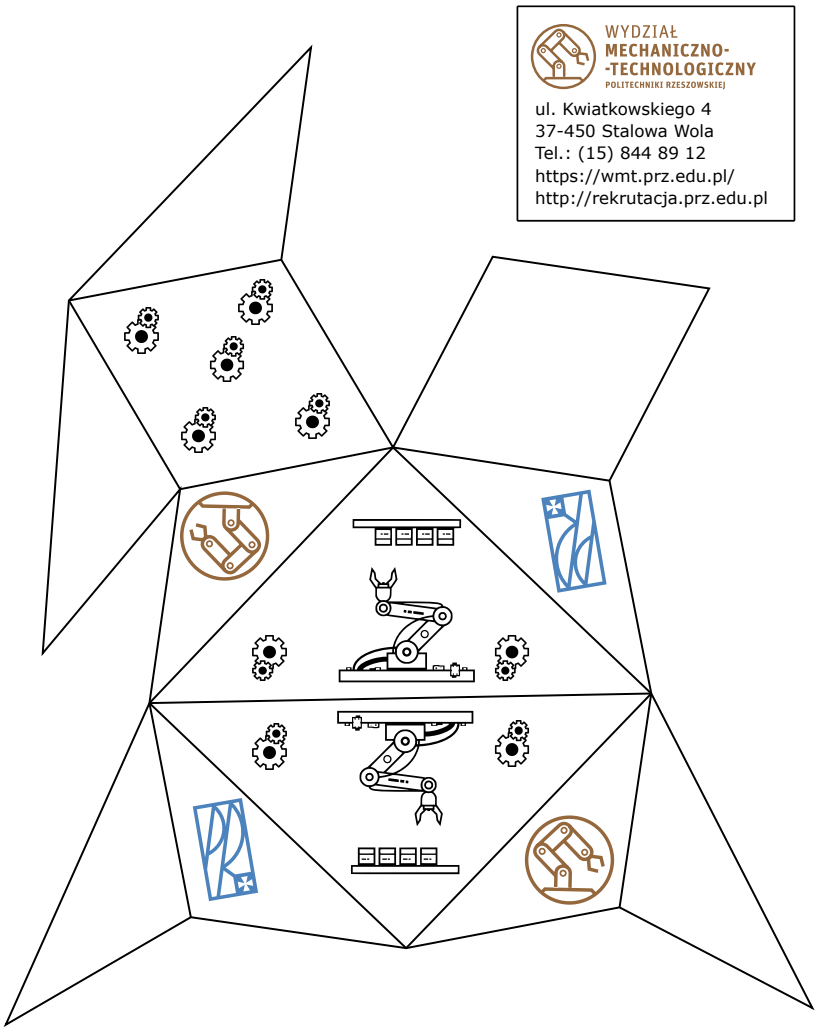
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).

Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.



Rysunek 1.5: Schemat bryły D

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

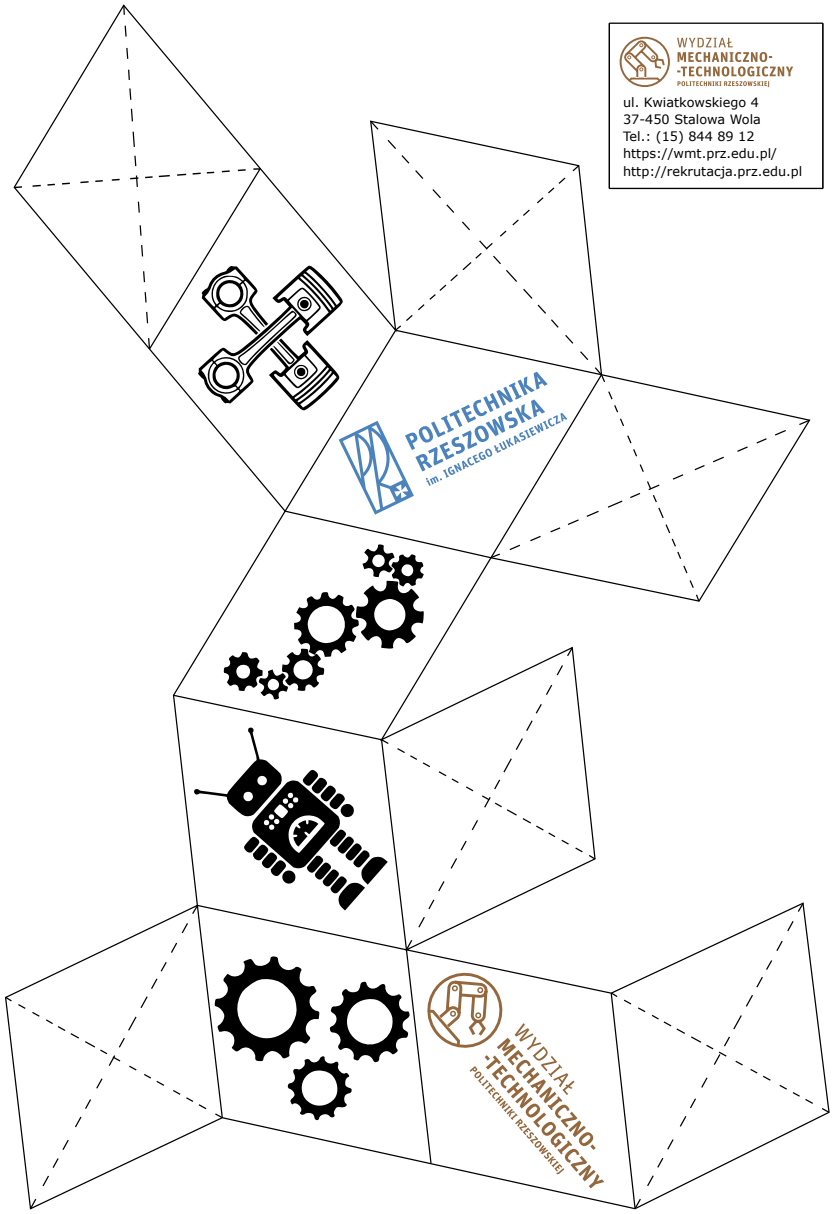


Rysunek 1.6: Schemat bryły E

Norway grants

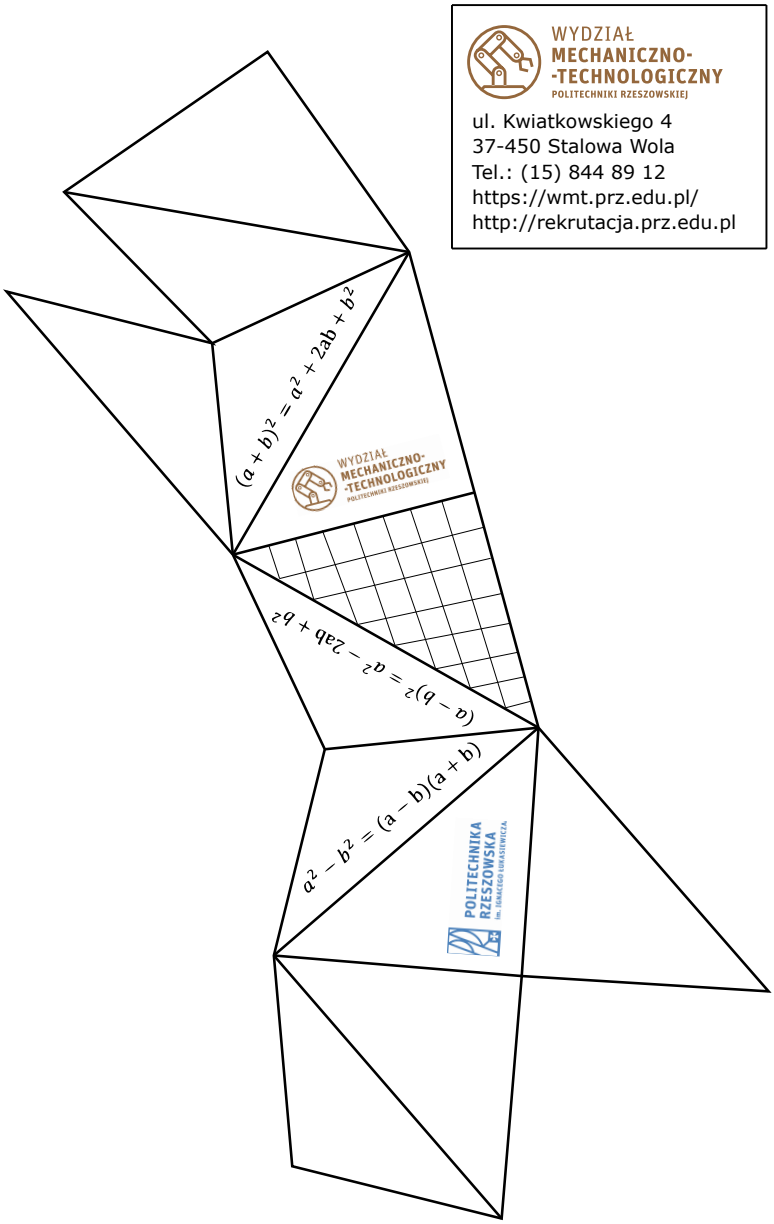
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).

Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.



Rysunek 1.7: Schemat bryły F

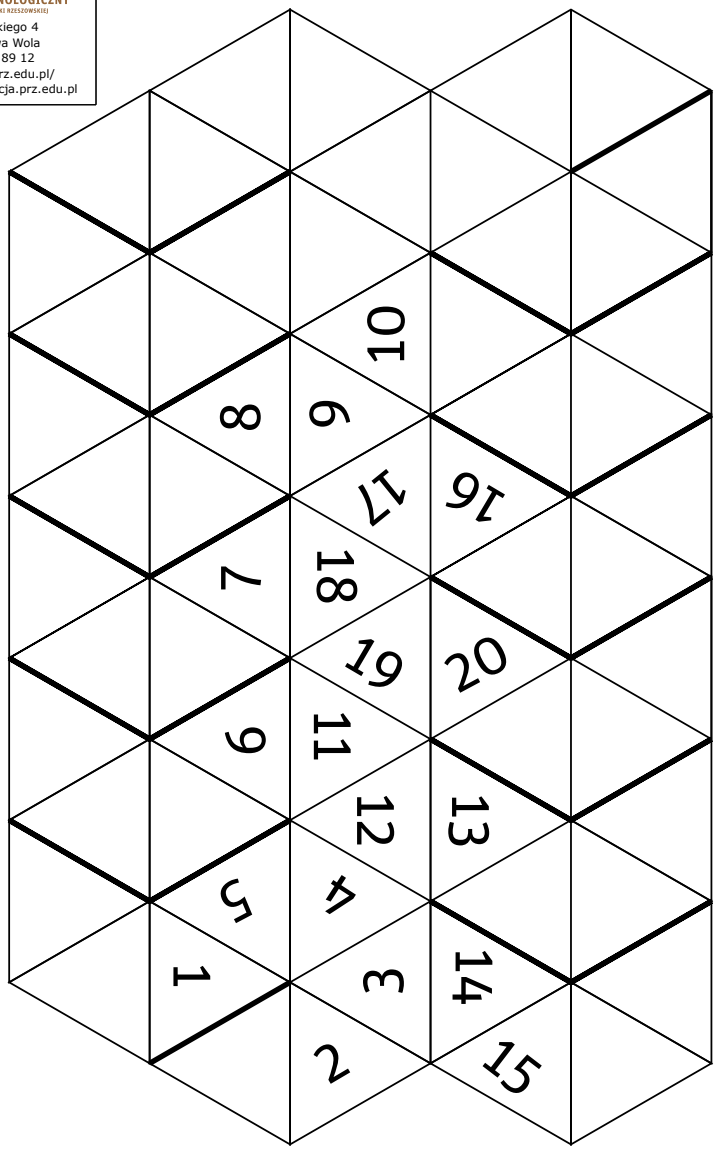
Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.



Rysunek 1.8: Schemat bryły G

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

WYDZIAŁ
MECHANICZNO-
-TECHNOLOGICZNY
POLITECHNIKI RZESZOWSKIEJ
ul. Kwiatkowskiego 4
37-450 Stalowa Wola
Tel.: (15) 844 89 12
https://wmt.prz.edu.pl/
http://rekrutacja.prz.edu.pl



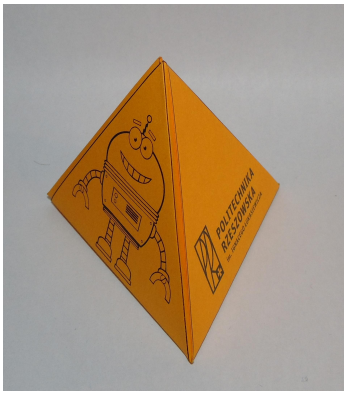
Rysunek 1.9: Schemat bryły H

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

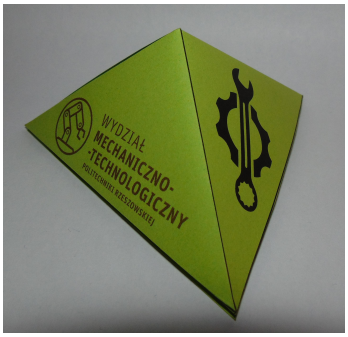
1.4 Zdjęcia przedstawiające gotowe modele brył

Każda z brył została wykonana z kolorowego papieru i sfotografowana. Rysunek 1.4 przedstawia, jak wyglądają poszczególne bryły.

A

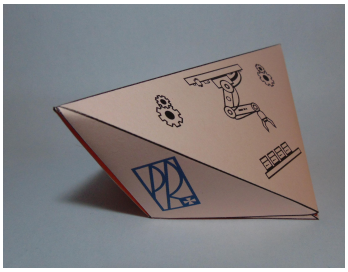


B



C

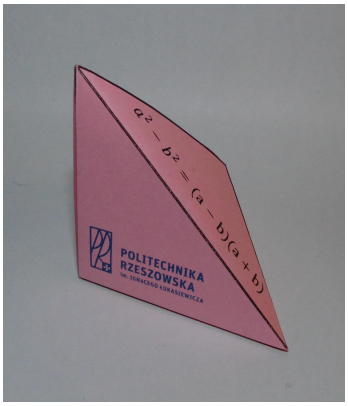
D



E

F

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.



G

H

Rysunek 1.10: Zdjęcia przedstawiające gotowe modele brył

Dodatkowym zadaniem było nakręcenie filmów instruktażowych, które prezentowałyby sposób złożenia brył. Filmiki te były sukcesywnie publikowane na Fanpage'u Wydziału Mechaniczno -Technologicznego:

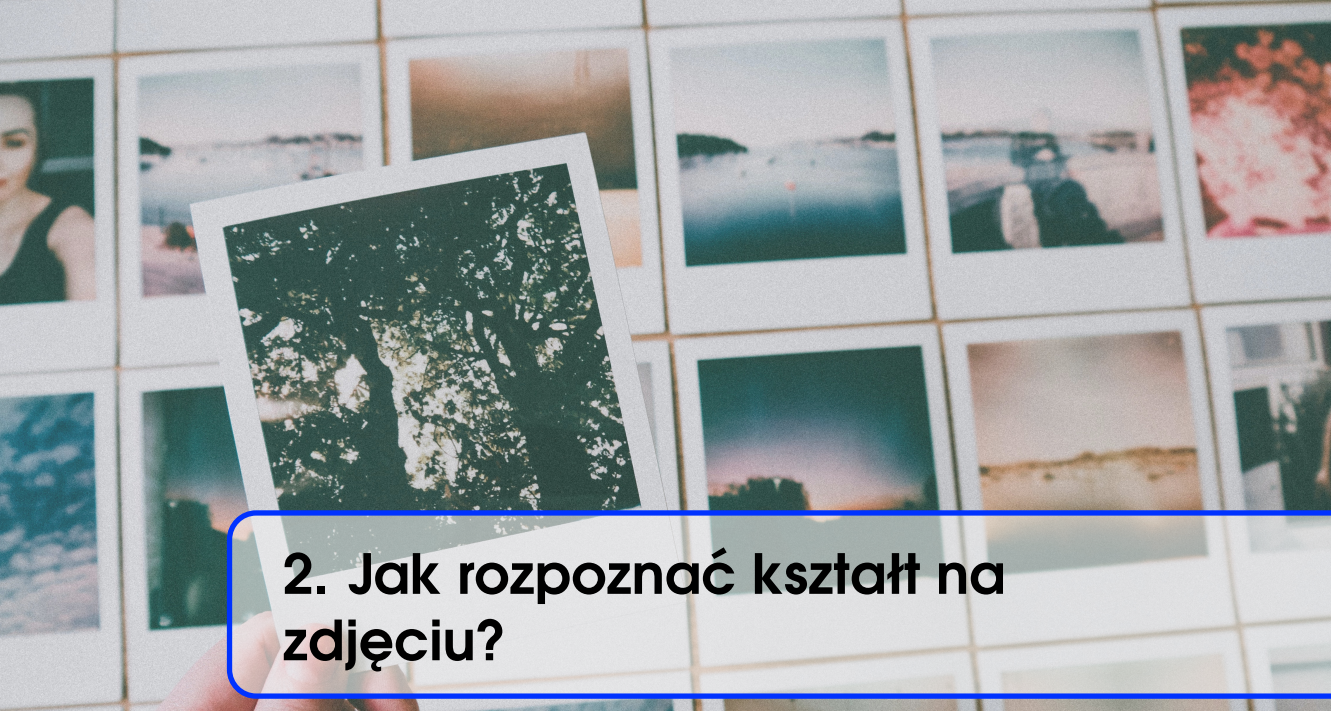
Fanpage Wydziału Mechaniczno-Technologicznego.

Linki do filmików przedstawiających proces tworzenia bryłek:

- bryła A (`facebook.com/prz.stw/videos/2095103977241843`),
- bryła B (`facebook.com/prz.stw/videos/575275889616467`),
- bryła C (`facebook.com/prz.stw/videos/755808011486655`),
- bryła D (`facebook.com/prz.stw/videos/2094381260683077`),
- bryła E (`facebook.com/prz.stw/videos/2213812745321381`),
- bryła F (`facebook.com/prz.stw/videos/1925341914234746`),
- bryła G (`facebook.com/prz.stw/videos/380641839210738`),
- bryła H (`facebook.com/prz.stw/videos/2294152947569273`).

Dobrej zabawy z Bryłkami bez kleju!

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.



2. Jak rozpoznać kształt na zdjęciu?

Łukasz Woźniak

2.1 Człowiek istota społeczna

Człowiek - istota społeczna - od zawsze żył w rzeczywistości wizualnej. Świadczą o tym rysunki w jaskiniach z epoki kamienia łupanego. Nasuwają się więc następujące pytania. Jak postrzegamy obrazy? W jaki sposób mózg interpretuje to, co widzi? Jak przetwarzamy informację wizualną?

Procesy poznawcze, kształtujące człowieka już w bardzo wczesnym etapie rozwoju, skupiają się na obrazach. Dziecko rozumie oraz rozpoznaje obraz matki, jeszcze zanim zacznie rozumieć słowo „matka". Obrazy stanowią nieodłączną sferę życia, wobec czego bezsprzeczny jest fakt, że tekst w bardzo małym stopniu jest w stanie z nimi rywalizować. Przetwarzanie grafiki to sposób, w jaki mózg człowieka analizuje i przekazuje informacje zwane percepcją wzrokową lub informacją wizualną. Dzięki tej zdolności odbiorca interpretuje i przetwarza znaczenie informacji wizualnych, które dostarcza mu wzrok. Tak więc postrzeganie wizualne odgrywa ogromną rolę w codziennym życiu. Dlatego też niezwykle istotne jest zrozumienie, w jaki sposób interpretowane są obrazy. Może okazać się to przydatne w procesie projektowania komputerowego systemu rozpoznawania i przetwarzania obrazu.

Wybitny psycholog Albert Mahrabian w latach 70. ubiegłego wieku w pozycji „Silent Messages" pisał, że komunikacja niewerbalna stanowi

Norway grants

Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).

Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

93% całej komunikacji człowieka, jak również informacje wizualne stanowią 90% wszystkich informacji przesyłanych do mózgu. Obrazy są przetwarzane przez mózg dużo szybciej niż tekst. Szacunkowo ludzie pamiętają 80% z tego, co widzą, a jedynie 20% z tego, co czytają. Zespół neurologów z Instytutu Technologicznego w Massachusetts (MIT) odkrył, że mózg jest w stanie przetwarzać całe obrazy, które ludzkie oko widzi przez zaledwie 13 milisekund. Człowiek może zatem zidentyfikować kilkanaście, połączonych konkretną koncepcją, obrazów migających w ułamku sekundy. Zespół naukowców z Uniwersytetu w Toronto w pracy na temat neuronalnych korelacji epizodycznego kodowania obrazów i słów (Neural correlates of the episodic encoding of pictures and words) dowiódł, że ludzie są w stanie zapamiętać 2000 zdjęć z dokładnością przynajmniej 90% przez okres kilku dni, nawet przy bardzo krótkim czasie ich prezentacji podczas nauki. Badania wskazują zatem, że człowiek posiada dużo doskonalszą pamięć do zapamiętywania treści wizualnych niż tekstu pisanego, co może wynikać z faktu, że dzięki obrazom automatycznie pojawiają się powiązania z inną wiedzą o świecie, czyli bardziej skomplikowanym kodowaniem niż w przypadku słów.

2.2 Informacja wizualna

Informacja wizualna to podstawowa postać informacji komunikowania się człowieka z otoczeniem, jak również odbierania informacji z otoczenia. Zmysł wzroku pozwala na odbieranie bodźców świetlnych. Umożliwia dostrzeganie i rozróżnianie przedmiotów, skalowanie ich wielkości i formy, przestrzennego usytuowania, jak również rozpoznawanie barwy i ruchu. W tym wypadku narzędziem poznawczym jest oko, natomiast receptorami czopki i pręciki tworzące siatkówkę oka. **Wzrok** to szczególny zmysł, który pozwala człowiekowi na pobieranie aż 80% informacji z otoczenia. Dzięki temu człowiek jest w stanie poznawać świat, głównie w postaci informacji wizualnej. Postacie, w jakich możemy je odczytać są typem informacji:

- obrazowej – informacja pierwotna, nieuwarunkowana znaczeniowo;
- tekstowej – informacja symboliczna, uwarunkowana kulturowo.

Zmysł wzroku przetwarza bodźce świetlne - oddziałujące na oko - na potencjały czynnościowe komórek nerwowych i przekazuje je do mózgu, gdzie są przetwarzane, a w konsekwencji interpretowane. Takie działanie pozwala na odbieranie informacji o świecie, rozróżnianie kształtu, ruchu, emocji oraz wrażeń estetycznych.

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

Podstawowym czynnikiem pozwalającym na widzenie przedmiotów jest światło. Bez światła nie jest możliwe zaobserwowanie barwy przedmiotu ani jego kształtu. Pionierem w tej dziedzinie był Izaak Newton, który już w 1666 roku odkrył, że światło słoneczne stanowi mieszaninę siedmiu **barw widmowych**:

1. czerwonej,
2. pomarańczowej,
3. żółtej,
4. zielonej,
5. niebieskiej,
6. granatowej,
7. fioletowej.

Każda z barw widmowych ma inną długość fali. Razem jednak stanowią światło białe, które w momencie, gdy trafia do detektora - takiego jak oko - może zostać pochłonięte lub odbite i wywołać wrażenie barwy. Zatem barwa obiektu zależy od światła padającego i światła odbitego. Przedmioty, które odbijają cały zakres widma rozpoznawane są jako białe. Natomiast te, które pochłaniają cały zakres widma odbierane są jako czarne. Subiektywne mieszanie barw odbitych, polegające na nakładaniu się na siebie barw składowych światła białego, decyduje zatem o rejestrowaniu barw powierzchni.

■ **Przykład 2.1** W tym wypadku przykładem mogą być zielone liście. Zawierają one chlorofil, który intensywnie pochłania barwę fioletową. Białe światło odbite od powierzchni liści jest pozbawione koloru fioletowego. Wywołuje to wrażenie zieleni i właśnie dlatego liście są postrzegane jako koloru zielonego (rys. 2.1).

Rysunek 2.1: Postrzeganie koloru liści

■

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

2.3 Uczenie maszynowe

Pisanie aplikacji - związanych ze sztuczną inteligencją - na potrzeby widzenia komputerowego wymaga podstawowej wiedzy z **uczenia maszynowego** oraz **uczenia głębokiego**. Podczas tworzenia kodu aplikacji łączymy koncepcje uczenia maszynowego i uczenia głębokiego z elementami języka naturalnego oraz odwzorowaniem zachowań ludzkich dla danego problemu. Stworzone w wyniku takiego działania oprogramowanie jest czymś w rodzaju sztucznej inteligencji.

Uczenie maszynowe wyewoluowało od tradycyjnego podejścia do programowania. Tradycyjne programowanie przebiega etapowo i polega na opracowaniu struktury reguł wyrażonych w języku programowania, pobraniu danych, przetworzeniu ich, a w konsekwencji zwróceniu wyniku. Podejście takie jest wykorzystywane w prawie każdej sytuacji, gdy zaprogramowanie pewnej sekwencji pozwala osiągnąć zamierzony wynik. Ma ono jednak swoje ograniczenia. Rozwiązanie jest możliwe do osiągnięcia tylko wówczas, gdy jest możliwość zdefiniowania reguł.

■ **Przykład 2.2** Weźmy pod uwagę przykład z ceną i zyskiem sklepu. Mamy dostęp do danych dotyczących ceny produktów i zysku netto ze sprzedaży. Możemy wyznaczyć wówczas wskaźnik atrakcyjności zakupu na podstawie obrotu danym produktem. Kod wczytuje cenę zakupu oraz zysk netto i zwraca wynik, który jest efektem dzielenia dwóch składników. Odpowiedź jest wynikiem operowania na danych przez zadanie reguł. Powyższa sytuacja odpowiada większości tworzonych programów zdefiniowanych za pomocą reguł. W innych przypadkach kod byłby zbyt złożony, aby móc rozwiązać takie problemy. ■

■ **Przykład 2.3** Inny przykład może stanowić sytuacja rozpoznawania aktywności fizycznej. Mając do dyspozycji prędkość, jesteśmy w stanie określić czy osoba spaceruje, czy biegnie. Oczywiście wymaga to wprowadzenia reguł określających zakres prędkości dla danej aktywności. Możemy założyć, że mamy odczynienia ze spacerem w przypadku, gdy prędkość jest mniejsza od 6 km/h, powyżej jest to już bieg. Co w przypadku, gdy osoba jedzie na rowerze? Zakładamy tu również regułę, że czynność ta jest wykonywana przy prędkości powyżej 12 km/h. Mamy więc zdefiniowane 3 czynności, ale załóżmy, że chcemy poszerzyć tą bazę i wprowadzić do niej grę w golfa. Aktywność ta wymaga jednocześnie spacerowania, przemieszczania się i czasem biegania. Z zaistniałych reguł nie jesteśmy w stanie wywnioskować czy dana aktywność jest właśnie grą w golfa. Co w wypadkach, gdy nie jesteśmy w stanie określić reguł? Wówczas musimy odwrócić sytuację i przypisać

Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Norway grants
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

dane wyjściowe łącznie z etykietami. Dzięki temu możemy brać pod uwagę nowe przypadki - na tym właśnie polega uczenie maszynowe. Schemat działania takiego oprogramowania jest inny. Zastanówmy się, co powinniśmy zmienić, by uzyskać poprawną odpowiedź. Wiemy, że każdy program potrzebuje danych, na których ma operować. Wiemy również, jakie rozwiązania chcemy uzyskać, a więc w takim wypadku niewiadomą są reguły, jakie muszą zaistnieć. To podejście nazywamy **uczeniem maszynowym**. ■

Podsumowując, procesem wstępnym jest etykietowanie danych, a wyjściowym dopasowanie reguł, które pasują do już zaetykietowanych danych. Dzięki temu, podczas wykonywania różnych aktywności, otrzymujemy reguły, które jednoznacznie definiują typ.

Dziedziny sztucznej inteligencji są rozległym i abstrakcyjnym tematem. W tym wypadku uczenie maszynowe możemy zakwalifikować jako **sztuczną inteligencję**, gdyż dzięki niej maszyna może rozpoznawać świat tak jak człowiek. W dalszej części zajmiemy się rozwojem rozpoznawania obrazu z wykorzystaniem uczenia maszynowego.

2.4 Widzenie komputerowe

Podczas opracowywania przetwarzania obrazu za pomocą Machine Lerningu, posłużymy się platformą TensorFlow. Jest to platforma oparta na zasadzie Open Source, w szczególności przeznaczona do tworzenia modeli uczenia maszynowego. Wewnątrz biblioteki zostało zaszytych wiele algorytmów oraz wzorców, wobec czego użytkownik może się skupić na rozwiązaniu problemu. Może być użyta do szerokiego zakresu zadań, ale skupia się w szczególności na uczeniu i wnioskowaniu sieci neuronowych. Ma wbudowanych wiele typowych algorytmów i wzorców, co w konsekwencji pozwala się skupić przede wszystkim na rozwiązaniu problemu, a nie na poszukiwaniu drogi do rozwiązania. Pozwala również na obsługę przetwarzania obrazu, dźwięku, tekstu oraz wielu innych zagadnień. W dalszej części skupimy się na przetwarzaniu obrazu, a w szczególności na rozpoznawaniu elementów garderoby na zdjęciach.

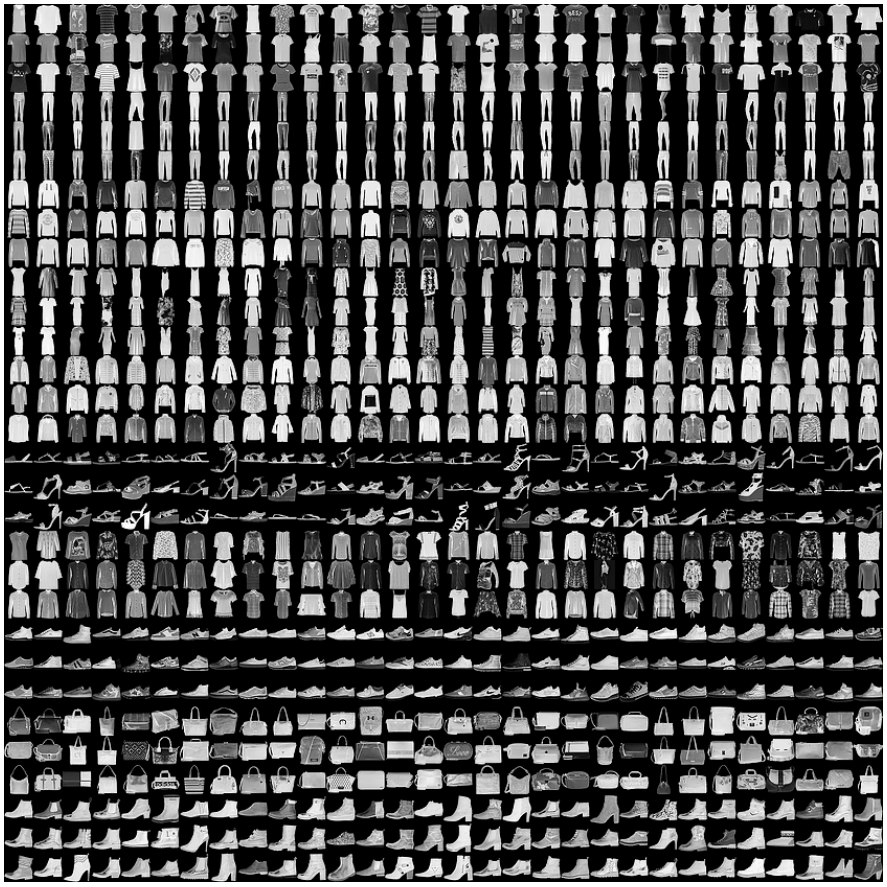
Proces tworzenia i przygotowania danych dla modeli uczenia maszynowego, podczas którego jednostka obliczeniowa korzysta z szeregu algorytmów (w celu rozpoznania danych wejściowych oraz sposobów ich rozróżniania), nazywamy **trenowaniem**. Wynikiem jest proces rozpoznawania lub kategoryzowania danych wejściowych, który jest nazywany **wnioskowaniem**.

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

Zastanówmy się chwilę, czego musielibyśmy użyć, aby móc rozpoznawać elementy garderoby. W tym celu możemy posłużyć się zdjęciami, które pozwolą nam na utworzenie modelu. Model taki, aby był dobrze wytrenowany, musi przetworzyć wiele obrazów, by osiągnąć jak najlepszy wynik.

2.5 Wykrywanie cech w obrazach

W tej części zajmiemy się właściwym widzeniem komputerowym, w którym model nauczy się rozpoznawać elementy garderoby. W tym celu przygotujemy obrazy zawarte w postaci gotowej biblioteki danych oraz zaprogramujemy sieć neuronową tak, aby dopasować dane do etykiet oraz poznamy reguły potrzebne do rozróżniania elementów.

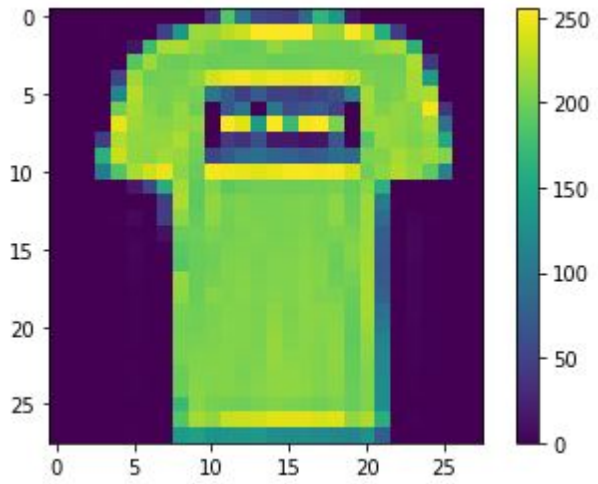


Rysunek 2.2: Zbiór Fashion-MNIST (MIT Licencja)

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

Czym zatem jest widzenie komputerowe? Jak wytłumaczyć je komputerowi? Zastanów się, w jaki sposób podczas wielu lat rozpoznawano obrazy i kształtowano ich nazwy. Wobec czego, jak elementy garderoby były rozpoznawane w czasie oraz jak je selekcjonowano i dobierano. Tę samą drogę możemy zastosować dla komputera, jednak wymaga ona nałożenia innych ograniczeń. W tym celu posłużymy się zbiorem danych przewidzianym do uczenia i analizy porównawczej algorytmów Fashion MNIST. Zbór posiada 70 tysięcy obrazów (60 tys. obrazów treningowych, 10 tys. obrazów testowych) w skali szarości od 0 do 255 i rozmiarze 28×28 pikseli, podzielone na 10 kategorii. Upraszczając rozumowanie, będziemy rozpoznawać na obrazie podstawowe 10 różnych rodzajów garderoby, takie jak: koszule, spodnie, sukienki czy buty.

Jak widać na rysunku 2.2, każdy pojedynczy element z prostokątnych elementów siatki przedstawia wycinek ze zbioru danych biblioteki i zawiera się w rozmiarze 28×28 pikseli. Skala szarości poszczególnych pikseli mieści się w przedziale od 0 do 255. Na rysunku 2.3 pokazano jeden z obrazów biblioteki Fashion MNIST.



Rysunek 2.3: Jeden z elementów zbioru Fashion-MNIST

Przeanalizujmy teraz, jakie informacje możemy odczytać z danego zbioru danych. Każdy obraz to złożenie 784 wartości (28×28), a każdy piksel mieści się w przedziale od 0 do 255 w skali szarości. Przyjmijmy zatem, że te niewiadome stanowią wartość X. Kolejną informacją jest zbiór, który posiada 10 różnych typów obrazów, a zatem jest to wartość Y. W dalszej części chcemy się dowiedzieć, w jaki sposób Y jest funkcją

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

X. W tym celu stworzymy większą ilość neuronów, z których każdy zostanie nauczony parametrów, wobec czego powstanie syntetyczna funkcja. Takie podejście zapewni nam możliwość dopasowania wzorca do pożądanej odpowiedzi.

Etykieta	Nazwa
0	T-shirt
1	Trouser
2	Pullover
3	Dress
4	Coat
5	Sandal
6	Shirt
7	Sneaker
8	Bag
9	Ankle boot

Tablica 2.1: Numery 10 typów obrazów

Podczas trenowania sieci neuronowej wczytujemy do każdego neuronu z osobna wartości X, natomiast wszystkie wagi M oraz przesunięcia C zostają zainicjalizowane losowo. Podczas sumowania wartości wyjściowych dla każdego z neuronów, każdy z nich wygeneruje pewną wartość. Działanie to jest wykonane dla wszystkich neuronów w warstwie wyjściowej. Wobec czego neuron zerowy poda wartość prawdopodobieństwa, z jaką piksele odpowiadają etykiecie zerowej, neuron pierwszy poda wynik prawdopodobieństwa dla etykiety pierwszej i tak po kolei dla każdego neuronu. W końcowym etapie będziemy chcieli dopasować uzyskaną wartość do żądanego wyniku. Poszukiwanym obrazem jest koszulka but.

Przyjrzyjmy się i przeanalizujmy kod programu przedstawiony na rysunku 2.4. W niniejszym artykule będziemy opisywać strukturę programu w języku Python. Na początek dodajemy obsługę biblioteki TensorFlow oraz obsługę pakietu Kears. Sam pakiet Kears zawiera obsługę wbudowanych zbiorów danych, w tym zbiory treningowe i testowe. Pakiet został wykorzystany na potrzeby niniejszego opracowania, w celu przedstawienia jak najprostszej formy obsługi uczenia maszynowego, aby nie obciążać odbiorcy nadmierną liczbą nowych nazw i koncepcji.

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

```
# TensorFlow and tf.keras
import tensorflow as tf

# Helper libraries
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

fashion_mnist = tf.keras.datasets.fashion_mnist

(train_images, train_labels),
(test_images, test_labels) = fashion_mnist.load_data()

train_images = train_images / 255.0
test_images = test_images / 255.0

model = tf.keras.Sequential([
    tf.keras.layers.Flatten(input_shape=(28, 28)),
    tf.keras.layers.Dense(128, activation='relu'),
    tf.keras.layers.Dense(10)
])

model.compile(optimizer='adam',
              loss=tf.keras.losses.SparseCategoricalCrossentropy(from_logits=True),
              metrics=['accuracy'])

model.fit(train_images, train_labels, epochs=10)
```

Rysunek 2.4: Kod programu

Kolejna linijka kodu odpowiada za uzyskanie zbiorów treningowych i testowych (rys. 2.5).

```
(train_images, train_labels),
(test_images, test_labels) = fashion_mnist.load_data()
```

Rysunek 2.5: Kod programu

Jako wynik operacji - *data.load_data* otrzymujemy dwa zbiory danych. Pierwszy, treningowy zbiór danych stanowi tablica o nazwie *training_images*, która zawiera w swojej strukturze 60 tys. tablic treningowych, wczytane rysunki o rozmiarach 28x28 pikseli, a także tablicę *training_labels*, która zawiera 60 tys. wartości w przedziale od 0 do 9. Drugi testowy zbiór stanowi tablica o nazwie *test_images*, która zawiera w swojej strukturze 10 tys. tablic testowych, wczytane rysunki o rozmiarach 28×28 pikseli, a także tablicę *training_labels*, która zawiera 10 tys. wartości w przedziale od 0 do 9.

Zadaniem, jakie stoi przed nami, jest dopasowanie obrazów treningowych do etykiet treningowych, aby uzyskać jak najlepsze dopasowanie.

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

```
train_images = train_images / 255.0
test_images = test_images / 255.0
```

Rysunek 2.6: Kod programu

Przy tym zabezpieczymy sieć na wypadek dostępu do danych testowych. Następnym krokiem jest normalizowanie obrazu. Polega ono na tym, że podzielimy każdą tablicę przez wartość 255, co odpowiada poziomowi szarości, a w konsekwencji da reprezentację pojedynczego piksela wartością 0 lub 1. Proces ten przeprowadza się w celu polepszenia wydajności w czasie trenowania sieci neuronowej (rys. 2.6). Następnie definiujemy sieć neuronową, która tworzy model (rys. 2.7). Część ta została opisana poniżej.

```
model = tf.keras.Sequential([
    tf.keras.layers.Flatten(input_shape=(28, 28)),
    tf.keras.layers.Dense(128, activation='relu'),
    tf.keras.layers.Dense(10)
])
```

Rysunek 2.7: Kod programu

Przyszedł czas na najważniejszą część, definiującą kompilacje modelu, gdzie wybieramy funkcję straty i optymalizator (rys. 2.8). Wybór odpowiedniego optymalizatora wiąże się z odpowiednią wiedzą na temat rozwiązywania problemów sztucznej inteligencji. W zadanym przypadku posłużymy się funkcją straty, którą jest rzadka kategoryczna entropia krzyżowa. Polega ona na tym, że zamiast próbować przewidywać pojedynczą liczbę, która ma być rozwiązaniem, ustalamy kategorię.

```
model.compile(optimizer='adam',
              loss=tf.keras.losses.
              SparseCategoricalCrossentropy(from_logits=True),
              metrics=['accuracy'])
```

Rysunek 2.8: Kod programu

Podobnie rzecz się ma do wyboru optymalizatora. Ważne jest, aby pracował on z odpowiednią wydajnością, gdyż będziemy analizować

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

zbiór danych o wielkości 60 tys. obrazów treningowych. W naszym wypadku zastosujemy optymalizator adam, który jest ulepszeniem stochastycznego spadku wzdłuż gradientu.

```
model.fit(train_images, train_labels, epochs=10)
```

Rysunek 2.9: Kod programu

Kolejna linijka programu odpowiada za dopasowanie - w czasie dziesięciu epok - obrazów treningowych do etykiet treningowych (rys. 2.9), po czym uruchamiamy skrypt.

Rysunek 2.10: Zbiór pojedynczych grafik

Na koniec możemy ocenić dokładność uczenia sieci neuronowej. W tym celu przekażemy do wytrenowanego modelu obrazy i etykiety przeznaczone do testów (rys. 2.10), aby móc prognozować, co widzi na każdym z obrazów.

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

2.6 Rozpoznawanie kształtów

Dotarliśmy do ostatniego punktu. Przystąpimy więc do uruchomienia naszego programu, który zaczyna trenować sieć - epoka po epoce. Na koniec uzyskujemy wynik, jak widać na rysunku 2.11.

```
Epoch 1/10
1875/1875 [==============================] - 5s 2ms/step - loss: 0.5003 - accuracy: 0.8246
Epoch 2/10
1875/1875 [==============================] - 4s 2ms/step - loss: 0.3746 - accuracy: 0.8648
Epoch 3/10
1875/1875 [==============================] - 4s 2ms/step - loss: 0.3367 - accuracy: 0.8788
Epoch 4/10
1875/1875 [==============================] - 4s 2ms/step - loss: 0.3126 - accuracy: 0.8854
Epoch 5/10
1875/1875 [==============================] - 4s 2ms/step - loss: 0.2943 - accuracy: 0.8922
Epoch 6/10
1875/1875 [==============================] - 4s 2ms/step - loss: 0.2805 - accuracy: 0.8961
Epoch 7/10
1875/1875 [==============================] - 4s 2ms/step - loss: 0.2681 - accuracy: 0.9009
Epoch 8/10
1875/1875 [==============================] - 4s 2ms/step - loss: 0.2561 - accuracy: 0.9048
Epoch 9/10
1875/1875 [==============================] - 4s 2ms/step - loss: 0.2484 - accuracy: 0.9082
Epoch 10/10
1875/1875 [==============================] - 4s 2ms/step - loss: 0.2401 - accuracy: 0.9111
<keras.callbacks.History at 0x7fd2f99f6490>
```

Rysunek 2.11: Trenowanie zbioru

Model, korzystając z danych treningowych, uzyskał dokładność bliską 91% podczas obliczeń w zaledwie 10 epokach. Spójrzmy teraz jak wygląda sytuacja z danymi testowymi.

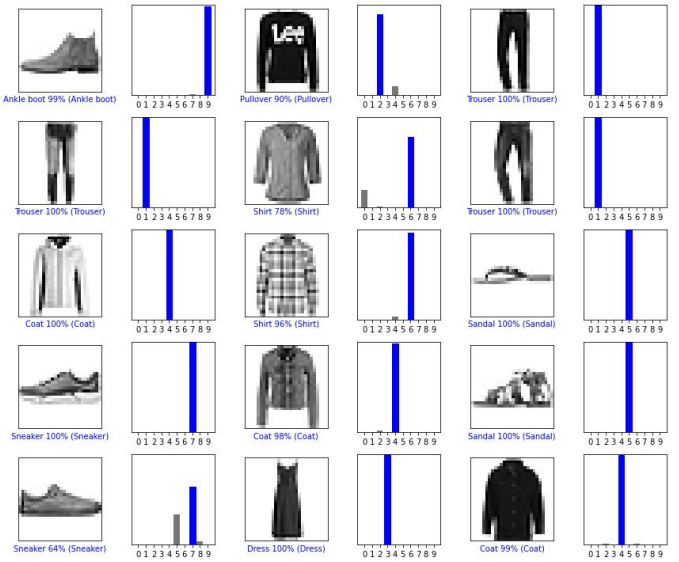
```
313/313 - 1s - loss: 0.3366 - accuracy: 0.8812 - 529ms/epoch - 2ms/step

Test accuracy: 0.8812000155448914
```

Rysunek 2.12: Trenowanie zbioru testowego

Tu, po jednej epoce, otrzymaliśmy wynik 88,12%, co jest wynikiem gorszym od wyniku dla danych treningowych, lecz nie odbiega znacząco od niego. Różnica taka zdarza się dość często. Wynika to z faktu, że podczas uczenia sieci neuronowej, potrafi ona dobrze dopasować dane wejściowe do danych wyjściowych, za pomocą których została ona wytrenowana.

Samo uczenie przebiega na zasadzie wnioskowania na podstawie przeanalizowanych przykładów, gdzie proces rozpoznaje jak wygląda dany element, taki jak sweter czy but (rys. 2.13).

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.



Rysunek 2.13: Trenowanie zbioru testowego

2.7 Analiza wyników

Znamy już dokładność wytrenowania modelu podczas użycia zbioru testowego. Teraz zastanówmy się, jak przeprowadzane jest testowanie i wnioskowanie. Otrzymany zbiór klasyfikacji, który otrzymaliśmy po przekazaniu obrazów testowych do metody model.predict został przedstawiony poniżej.

```
array([1.2184351e-07, 6.0797112e-10, 1.5039088e-08, 1.7623728e-09,
       1.9998125e-09, 1.3366874e-03, 1.8967589e-07, 3.8073987e-02,
       3.3286156e-08, 9.6058887e-01], dtype=float32)
```

Rysunek 2.14: Wynik dla trenowanej sieci

Otrzymana tablica zawiera wyniki dla 10 neuronów wyjściowych. Przypisana etykieta jest faktycznym odzwierciedleniem klasy elementu odzieży. Wartości oznaczają prawdopodobieństwo, z jakim dany obraz odpowiada danej etykiecie. Wobec czego uzyskujemy informację, że z prawdopodobieństwem wynoszącym 96,05% element z indeksem 0 będzie miał etykietę równą 9. Dokonując oceny wiemy, że ten element ma taką etykietę, wobec czego prognoza jest prawidłowa.

Powyższe wyniki odnoszą się do przypadku, w którym trenowaliśmy sieć tylko przez czas dziesięciu epok. Oznacza to w praktyce, że

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

pięć razy wykonaliśmy całą pętlę treningową. W tym czasie losowo zainicjalizowaliśmy neurony porównaniu ich z etykietami, sprawdzeniu wydajności za pomocą funkcji straty oraz wykonaniu aktualizacji. Otrzymane wyniki są całkiem dobre i wynoszą 91% dla danych treningowych i 88,12% dla danych testowych.

Norway grants

Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).

Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

3. Prosta gra w Pythonie

Leszek Klich

3.1 Wstęp

Jedną z najważniejszych zalet języka Python jest z pewnością jego uniwersalność. Przy pomocy tego języka można zaprogramować stronę internetową, program na komputery biurkowe, skrypt administracyjny lub... grę. I właśnie tym tematem zajmiemy się w niniejszym rozdziale. Choć tworzenie gier jest procesem skomplikowanym, to przy wykorzystaniu odpowiednich narzędzi programowanie prostych gier planszowych, logicznych czy zręcznościowych wcale nie musi być trudne. Wystarczy sięgnąć po język Python i wybrać jedną z wielu darmowych bibliotek przeznaczonych do tworzenia gier. Dzięki temu, w bardzo krótkim czasie, można poznać podstawy pisania gier.

W tym rozdziale zapoznamy się z popularną biblioteką PyGame, która ułatwia i przyspiesza tworzenie gier. Dzięki wielu funkcjonalnościom oraz prostocie biblioteka wymaga jedynie podstawowych umiejętności z zakresu programowania w języku Python. W ramach rozdziału zaprogramujemy prostą grę typu „pong", w której będziemy odbijać piłeczkę przy pomocy paletki. Aby uatrakcyjnić grę zaprogramujemy także prostą punktację.

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

3.2 Biblioteka PyGame

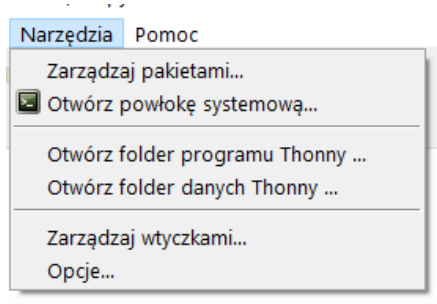
PyGame to popularna biblioteka dla języka Python, która oferuje zestaw funkcjonalności ułatwiających tworzenie gier. Jakie to ułatwienia? Na przykład interfejs graficzny, gotowe funkcje rysowania, matematyka wektorowa, wykrywanie kolizji pomiędzy obiektami, manipulacja pikselami, transformacje, filtry, obsługa czcionek czy klawiatury oraz myszki. Biblioteka ukrywa przed programistą mechanikę niskiego poziomu, oferując w zamian prostotę i szybkość programowania. Istotną cechą jest jej multiplatformowość, co oznacza, że przy jej pomocy można tworzyć gry dla systemów Windows, Linux czy MacOS. Co więcej, gry napisane w PyGame mogą działać także na telefonach i tabletach z systemem Android. Oto kilka podstawowych zalet biblioteki:

- Jest darmowa, a dzięki temu można przy jej pomocy tworzyć zarówno darmowe, jak i płatne gry.
- Używa języka C, a to oznacza, że działa bardzo szybko. Może także wykorzystać wielordzeniowe mikroprocesory.
- Prosta i łatwa w użyciu, a dzięki temu programowaniem gier mogą zająć się nawet dzieci.
- Bardzo popularna i dobrze udokumentowana.

Instalacja biblioteki

Aby zainstalować język Python w systemie Windows skorzystaj z Instrukcji instalacji oprogramowania Python, która została szczegółowo opisana w załączniku A.

Zanim rozpoczniemy pisanie gry musimy zainstalować bibliotekę PyGame. Aby to zrobić należy uruchomić środowisko Thonny i z menu **Narzędzia** wybrać polecenie **Otwórz powłokę systemową**, jak zostało to przedstawione na rysunku 3.1.



Rysunek 3.1: Uruchamianie powłoki systemowej w środowisku Thonny

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

Bibliotekę zainstalujemy z poziomu powłoki systemowej, wpisując w oknie polecenie: **pip install pygame** <Enter>. Polecenie **pip** pobierze i zainstaluje bibliotekę (może to troszkę potrwać w zależności od szybkości łącza internetowego). Po zainstalowaniu biblioteki, proces przygotowania środowiska pracy jest zakończony i możemy rozpocząć naukę programowania.

3.3 Podstawy programowania gier

Jeśli została zainstalowana biblioteka PyGame, można przystąpić do napisania pierwszego programu. Na początek będzie to coś bardzo prostego. Otwórz środowisko programistyczne Thonny i wpisz w nim następujący kod:

```
import pygame

pygame.init()
```

Listing 3.1: Pierwszy program

Gdy upewnisz się, że nie popełniłeś błędu, musisz teraz uruchomić program. Istnieje wiele możliwości uruchomienia programu. Poniżej prezentuję kilka przykładów. Przetestuj je wszystkie i wybierz najwygodniejszy sposób.

Definicja 3.1 — Uruchamianie programu. Uruchomienie programu w środowisku Thonny może odbywać się na kilka sposobów. Przetestuj wszystkie poniższe sposoby uruchamiania programu i wybierz swój ulubiony:

- wciskając przycisk **F5**;
- przy pomocy menu **Uruchom** –> **Uruchom aktualny skrypt**;
- przy pomocy paska narzędzi, klikając myszką na przycisk strzałki.

Uwaga - jeśli po raz pierwszy uruchamiasz program, edytor Thonny zapyta o nazwę pliku i zapisze skrypt w wybranym folderze. Podaj zatem nazwę pliku (unikaj spacji oraz polskich znaków w nazwie pliku), wybierz folder, w którym powinien być zapisany program i zapisz program.

Na rysunku 3.2 widać wynik działania programu. Ekran podzielony jest na dwie sekcje. Górna sekcja to edytor kodu źródłowego, do którego wpisaliśmy kod naszego pierwszego programu. Druga (dolna) sekcja to powłoka, w której widoczny jest efekt działania programu, a raczej komunikaty, które dotyczą jego działania. Teraz omówimy wpisany kod. Pierwsza linia **import pygame** oznacza zaimportowanie

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

Rysunek 3.2: Środowisko Thonny z uruchomionym programem w Thonny IDE

biblioteki PyGame. W ten sposób poinformowaliśmy Pythona, że w naszym programie chcemy wykorzystać bibliotekę. Kolejna linia to inicjalizacaja biblioteki, czyli wykonanie niezbędnych czynności, które sprawią, że biblioteka będzie poprawnie działać. Aby zakończyć działanie programu, kliknij myszką na przycisk **Stop** lub użyj kombinacji klawiszy **Ctrl**+**F2**.

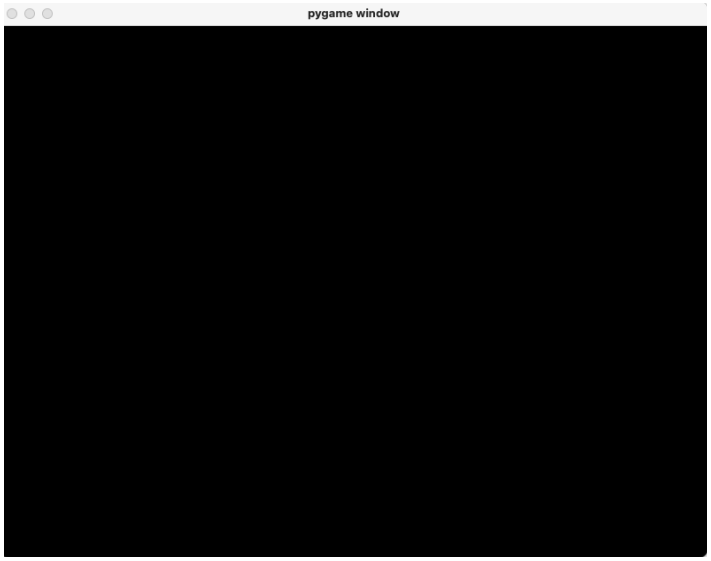
Jak na razie nasz program nie robi zbyt wiele, ale zaraz to zmienimy. Przede wszystkim spróbujemy wyświetlić okno naszej gry. W tym celu utworzymy sobie zmienną o nazwie **ekran** i przypiszemy do niej nowy obiekt okna: *ekran = pygame.display.set_mode((rozmiarX, rozmiarY))*. Jak widać metoda set_mode przyjmuje dwa argumenty, gdzie **rozmiarX** oznacza rozmiar naszego okna (gry) w poziomie, zaś zmienna **rozmiarY** jego wysokość. Zmodyfikujmy zatem program do następującej postaci:

```
import pygame

pygame.init()
ekran = pygame.display.set_mode((800, 600))
```

Listing 3.2: Tworzymy okno gry

Ponownie uruchom program. Jeśli powyższy kod został wpisany bezbłędnie, powinno wyświetlić się okno naszej gry, jak widać na rysunku 3.3. Aby zakończyć działanie programu, kliknij myszką na przycisk **Stop** lub użyj kombinacji klawiszy **Ctrl**+**F2**. Możesz spróbować zmodyfikować rozmiar okna i dostosować jego wielkość do własnego

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.



Rysunek 3.3: Okno gry napisane przy pomocy biblioteki PyGame

ekranu. Pamiętaj jednak, że istnieje wiele różnych monitorów o różnych rozdzielczościach i ustawienie zbyt dużego rozmiaru może spowodować, że gra się nie wyświetli. Właśnie dlatego użyliśmy dość niskich parametrów rozmiaru. W dalszej części zmodyfikujemy naszą grę, aby uruchamiała się na pełnym ekranie, niezależnie od parametrów monitorów!

Spójrzmy jeszcze raz na nowo utworzone okno gry z rysunku 3.3. Na belce tytułowej widnieje domyślnie wygenerowany tytuł **pygame window**. Aby go zmienić i dodać własny tytuł, np. z nazwą gry, wystarczy dodać nową linię programu i ustawić właściwość okna przy pomocy polecenia *pygame.display.set_ caption("Prosta gra PONG")*. Zatem teraz, kod naszej gry będzie wyglądał następująco:

```
import pygame

pygame.init()

ekran = pygame.display.set_mode((800, 600))
pygame.display.set_caption("Prosta gra PONG")
```

Listing 3.3: Dodajemy tytuł do okna gry

Ponownie uruchom program i zwróć uwagę, czy tytuł okna zawiera prawidłowy tekst. W ten sposób przygotowaliśmy okno gry i poprawnie je nazwaliśmy. Teraz zajmiemy się bardzo istotnym tematem: **obsługą zdarzeń**.

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

Jak można zauważyć, uruchamiając naszą grę, otworzone okno nie odpowiadało na zamknięcie i nie zamykało się, gdy próbowaliśmy to zrobić. Dopiero zatrzymanie programu powodowało, że okno zostało zamknięte. Przyczyną tego jest właśnie brak zaprogramowanej reakcji na zdarzenia. Wyjaśnijmy najpierw, co to są zdarzenia.

Definicja 3.2 — Zdarzenia (Events). Termin związany z programowaniem, opartym na zdarzeniach. Wszystko, co dzieje się podczas działania dowolnego programu, tak naprawdę opiera się na generowaniu zdarzeń. Dla przykładu - podczas poruszania myszką, system operacyjny generuje zdarzenie, które zawiera sam fakt poruszenia myszką, ale także zwraca aktualną pozycję wskaźnika myszy. W przypadku, gdy naciśniesz klawisz na klawiaturze, generowane jest zdarzenie, informujące, że właśnie naciśnięto klawisz. Albo gdy klikniesz myszką przycisk w dowolnym programie, generowane jest zdarzenie o tym fakcie.

Ze zdarzeniami wiąże się temat obsługi zdarzeń. Oznacza to, że aby przechwycić występujące zdarzenie, należy go „wyłapać" i obsłużyć, czyli zaimplementować obsługę zdarzenia. Nasza gra również będzie odczytywać zdarzenia związane z oknem i stanem gry i podejmować odpowiednie działania. Dla przykładu - jeśli użytkownik wciśnie przycisk strzałki w lewo, gra przechwyci tę informację (zdarzenie) i odpowiednio przekieruje obiekt paletki w lewo. W przypadku, gdy użytkownik chce zakończyć grę, kliknie przycisk zamknięcia okna, wówczas gra powinna zakończyć działanie.

gra.py *

```
1  import pygame
2
3  pygame.init()
4
5
6  ekran = pygame.display.set_mode((800, 600))
7  pygame.display.set_caption("Prosta gra PONG")
8
9  while True:
10     for event in pygame.event.get():
11         if event.type == pygame.QUIT:
12             exit(0)
```

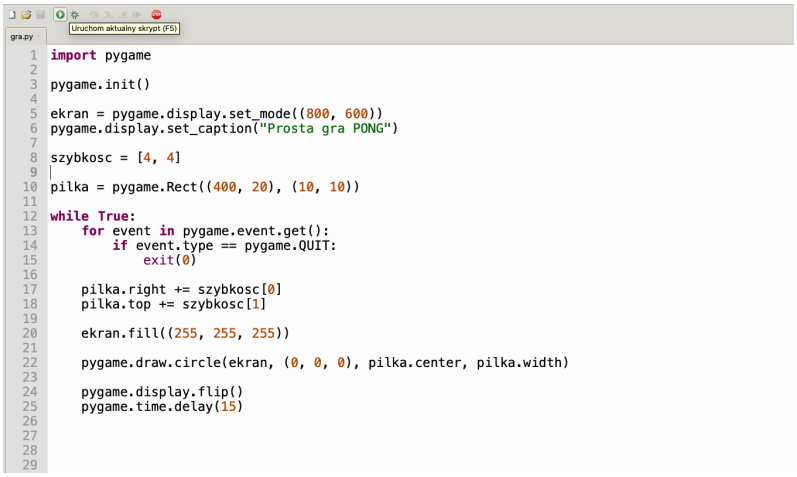
Rysunek 3.4: Obsługa zdarzenia zamknięcia okna gry

Zaprogramujmy zatem pętlę, która będzie zbierać wszystkie zdarzenia i reagować wyłącznie na zdarzenie zakończenia gry (czyli okna). Wprowadź dodatkowy kod do naszej gry (rys. 3.4). Jak widać, wpro-

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

wadziliśmy niekończącą się pętlę, w której pobieramy listę zdarzeń gry (wiersz 10). Teraz sprawdzamy wszystkie zdarzenia w kolejce i przeszukujemy je pod kątem wystąpienia zdarzenia **QUIT**, czyli zakończenia gry (wiersz 11). Jeśli takie zdarzenie nastąpi, kończymy program (wiersz 12). Spróbuj uruchomić program ponownie i zamknąć go, klikając krzyżyk zakończenia w oknie. Tym razem program zakończył się poprawnie, co oznacza, że przechwytywanie zdarzeń zadziałało! Na razie zajmiemy się budową pola gry, zaś do zdarzeń wrócimy niebawem.

Teraz zaprogramujemy piłkę i wprawimy ją w ruch. Spójrz na obrazek 3.5 i wprowadź do gry dodatkowe wiersze z obrazka.



Rysunek 3.5: Kod tworzący piłkę oraz jej podstawowy ruch

Jak widać, pojawiły się nowe wiersze. W wierszu 10 utworzyliśmy obiekt **Rect**, który jest charakterystyczny dla biblioteki PyGame. Przechowuje on współrzędne prostokątne. Dzięki temu możemy tworzyć obiekty typu Rect, oznaczające ich granice. W tym przypadku utworzyliśmy obiekt Rect, zaczynający się od X = 400 (oznacza środek ekranu - ponieważ cały ekran w poziomie = 800, to 800/2 = 400 oraz Y = 20, zaś obiekt będzie rozpoczynał się o 20 punktów od górnej granicy ekranu). Dodatkowo określiliśmy wielkość przestrzeni jako 10 punktów w poziomie oraz 10 punktów w pionie. Problem w tym, że samo zadeklarowanie nie zadziała, bowiem w wierszu 10 tylko zadeklarowaliśmy obiekt **pilka**. Należy go jeszcze narysować. I tym zajmuje się wiersz 22, umieszczony w pętli głównej, co oznacza, że będzie się ciągle uruchamiał. Prześledźmy teraz wiersze, które zostały dodane, lecz nie zostały opisane.

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

- W wierszu 8 zadeklarowaliśmy listę o nazwie szybkość, zawierającą dwa parametry. Będziemy ich używać do kontrolowania szybkości przemieszczania obiektu **pilka**.
- Wiersz 17 i 18 odpowiada za przesunięcie obiektu **pilka** w prawy dolny róg oraz od góry w dół, z zadeklarowaną szybkością.
- W wierszu 20 czyścimy ekran, wypełniając go białym kolorem.
- Wiersz 22 odpowiada za narysowanie okręgu (piłeczki) na ekranie w czarnym kolorze (0, 0, 0). Center to punkt środkowy okręgu.

Dokładniejszego wyjaśnienia wymaga wiersz 24 oraz 25. Do wyświetlania ekranu używamy metody flip(), która daje nam możliwość, tak zwanego, podwójnego buforowania. Aby zrozumieć działanie tego popularnego mechanizmu w świecie gier, wystarczy wyobrazić sobie kartkę papieru. Ma ona dwie strony, zaś pokazujemy widzowi jedynie jedną ze stron. Drugą zaś w tym czasie rysujemy i gdy skończymy rysować, wykonujemy flip(), czyli odwracamy kartkę. Dzięki temu można wyeliminować lub zminimalizować wszelkie artefakty rysowania i obraz jest lepszy. Jeśli chodzi o wiersz 25, w którym użyliśmy opóźnienia o wartości 15 milisekund. Opóźnienie służy do spowolnienia naszej gry. Oczywiście możesz usunąć tę linię i spróbować manipulować prędkością piłeczki i płynnością gry zmieniając wartości zmiennej **szybkosc**. Praktyka jednak wykazuje, że czasami dodanie opóźnienia w postaci delay(), daje nam lepszą elastyczność wpływania na płynność działania gry. Czas zatem uruchomić naszą grę. Po uruchomieniu zobaczysz, że piłeczka upada z góry w dół kierując się do prawego rogu. Następnie piłka znika z ekranu i... nie dzieje się nic. Jest to zachowanie najzupełniej prawidłowe, ponieważ nie określiliśmy ograniczeń i warunków, które zadziałają, gdy piłeczka "wyjedzie" poza ekran. Spróbujemy to teraz naprawić.

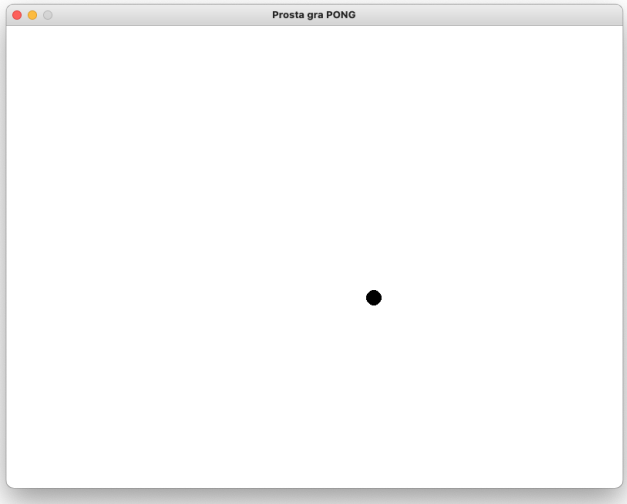
W poniższym listingu wprowadziliśmy ograniczenia dla przemieszczającej się piłki. Jeśli górna lub dolna część piłki znajduje się u góry (0) lub na dole (600) ekranu, to zmieni się jej kierunek ruchu w pionie.

```
import pygame

pygame.init()

ekran = pygame.display.set_mode((800, 600))
pygame.display.set_caption("Prosta gra PONG")

szybkosc = [4, 4]

pilka = pygame.Rect((400, 20, (10, 10))

while True:
    for event in pygame.event.get()
        if event.type == pygame.QUIT():
```

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

```
            exit(0)

    pilka.right += szybkosc[0]
    pilka.top += -szybkosc[1]

    if pilka.top <= 0 or pilka.bottom >= 600:
        szybkosc[1] = -szybkosc[0]

    if pilka.right >= 800:
        szybkosc[0] = -szybkosc[0]

    if pilka.left <= 0:
        szybkosc[0] = -szybkosc[0]

    ekran.fill((255, 255, 255))

    pygame.draw.circle(ekran, (0, 0, 0), pilka.center, pilka.
    width)

    pygame.display.flip()
    pygame.time.delay(15)
```

Listing 3.4: Implementacja odbijania się piłki od ścian okna



Rysunek 3.6: Niekończące się odbijanie piłki w oknie

Analogicznie w przypadku, gdy piłeczka zbliży się do prawej lub lewej części ekranu, zmieni kierunek na przeciwny. Dzięki temu otrzymujemy niekończącą się pętlę, odbijającej się piłeczki od ścian ekranu gry. Uruchom grę i sprawdź jak piłeczka wędruje po ekranie i odbija się od ścian.

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

```
while True:
    for event in pygame.event.get():
        if event.type == pygame.QUIT:
            exit(0)

        # kontrola paletki przy pomocy myszki
        elif event.type == pygame.MOUSEMOTION:
            paletka.centerx = event.pos[0]
            # korekta paletki gdy wyjdzie poza okno gry
            if paletka.left < 0:
                paletka.left = 0
            elif paletka.right >= 800:
                paletka.right = 800

    # kontrola paletki przy pomocy strzałek lewo/prawo
    if event.type == pygame.KEYDOWN:
        if event.key == pygame.K_LEFT and paletka.left > 0:
            paletka.move_ip(-5, 0)
        elif event.key == pygame.K_RIGHT and paletka.right <
    800:
            paletka.move_ip(5, 0)
```

Listing 3.5: Obsługa zdarzeń myszki i klawiatury - sterowanie paletką

Uzyskany niewielkim nakładem pracy efekt, wydaje się być miły dla oka, lecz szybko się znudzi. Narysujmy więc paletkę, którą będzie można przesuwać przy pomocy myszki lub klawiszy <– oraz –>. Spójrz na powyższy listing, który zawiera zmodyfikowany kod naszej gry. Obejmuje on obsługę zdarzeń myszki, czyli przesuwa paletkę w prawo lub w lewo, lecz tylko w przypadku, gdy paletka nie znajduje się w skrajnie lewym lub skrajnie prawym obszarze okna gry. Przechwytujemy także zdarzenia wciśnięcia klawiszy strzałek - (K_LEFT oraz k_RIGHT). Do przesuwania obiektu paletki, po wciśnięciu odpowiedniego klawisza, użyliśmy metody **move_ip(x, y)**, która przyjmuje dwa argumenty (x oznacza przesunięcie w poziomie), zaś y oznacza przesunięcie w pionie. Jednocześnie przed przesunięciem kontrolujemy, czy paletka nie przekracza wartości minimalnej (0) i maksymalnej (800) okna gry w poziomie.

Po uruchomieniu gry piłeczka odbija się od ścian, zaś paletka reaguje na ruch myszką oraz klawisze strzałek. Jednak gdy piłka zderzy się z paletką, nie powoduje to jej odbicia. Zamiast tego, piłeczka „przelatuje" przez paletkę, ignorując zasady fizyki. Musimy zatem dopisać jeszcze obsługę kolizji piłeczki z paletką i zdecydować, co się wówczas powinno wydarzyć. Najpierw musimy zaprogramować, aby piłeczka odbiła się od paletki. W tym celu wykorzystamy metodę **colliderect()**, którą wykonamy na obiekcie **pilka**. Przyjmuje ona argument obiektu, z którym następuje kolizja.

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

```
# obsłużymy zderzenie piłki z paletką
# na razie tylko odbijemy piłkę
if paletka.colliderect(pilka):
    szybkosc[1] = -szybkosc[1]
```

Rysunek 3.7: Obsługa kolizji piłeczki z paletką

Wprowadzenie jednego warunku, który został umieszczony na rysunku 3.7, spowoduje, że piłka będzie za każdym razem odbijać się od paletki w przypadku, gdy przy pomocy klawiszy lub myszki „trafimy" paletką w piłkę. Na obecnym etapie nasza gra jest już prawie gotowa. Jest jednak troszkę nudna, ponieważ gra jest niewrażliwa na błędy gracza. Z tego powodu, nawet wówczas, gdy piłeczka upadnie, nie ma to wpływu na dalszą grę. Dodajmy zatem efekt rywalizacji, czyli punkty. Ustalmy też proste zasady gry: za każdym poprawnym odbiciem piłeczki, gracz otrzyma jeden punkt. W przypadku, gdy piłeczka upadnie, punkt zostanie odjęty. Koniec gry następuje wówczas, gdy gracz posiada zero punktów i piłka ponownie upadnie. W tym przypadku gra zostanie zakończona.

```
# Piłka upadła - odejmij punkt lub zakończ grę
# gdy gracz nie posiada już żadnych punktów
elif pilka.bottom >= 600:
    if punkty > 0:
        punkty -= 1
    else:
        exit(0)

# obsłużymy zderzenie piłki z paletką
# jeśli paletka trafi w piłkę, dodajemy punkt
if paletka.colliderect(pilka):
    szybkosc[1] = -szybkosc[1]
    punkty += 1
```

Rysunek 3.8: Obsługa kolizji piłeczki z paletką

Na rysunku 3.8 znajduje się kod, który implementuje obsługę punktów zgodną z zasadami gry. Można już przetestować grę, jednak brakuje jeszcze jednego elementu - wyświetlania punktów. Oto gotowy kod naszej gry, który uwzględnia wyświetlanie zdobytych punktów:

```
import pygame

pygame.init()

ekran = pygame.display.set_mode((800, 600))
pygame.display.set_caption("Prosta gra PONG")

szybkosc = [4, 4]
punkty = 0

pilka = pygame.Rect((400, 20), (10, 10))
```

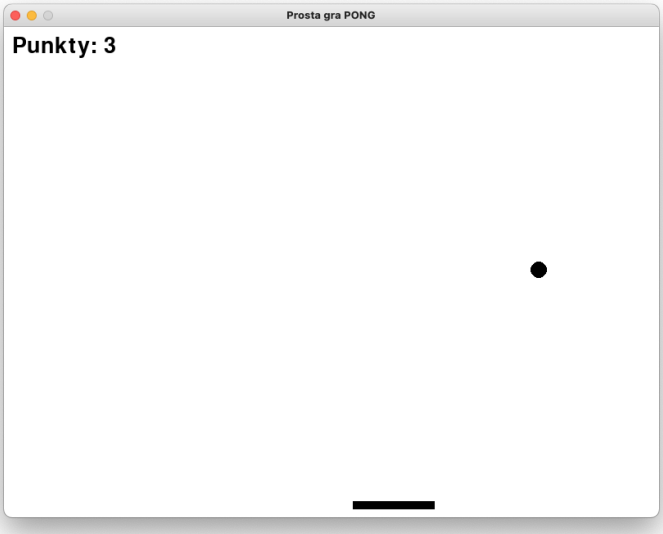
Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

```
paletka = pygame.Rect(400, 580, 100, 10)

font = pygame.font.Font(None, 40)

while True:
    for event in pygame.event.get():
        if event.type == pygame.QUIT:
            exit(0)

        # kontrola paletki przy pomocy myszki
        elif event.type == pygame.MOUSEMOTION:
            paletka.centerx = event.pos[0]
            # korekta paletki gdy wyjdzie poza okno gry
            if paletka.left < 0:
                paletka.left = 0
            elif paletka.right >= 800:
                paletka.right = 800

    # kontrola paletki przy pomocy strzałek lewo/prawo
    if event.type == pygame.KEYDOWN:
        if event.key == pygame.K_LEFT and paletka.left > 0:
            paletka.move_ip(-5, 0)
        elif event.key == pygame.K_RIGHT and paletka.right <
    800:
            paletka.move_ip(5, 0)

    pilka.right += szybkosc[0]
    pilka.top += szybkosc[1]

    if pilka.top <= 0 or pilka.bottom >= 600:
        szybkosc[1] = -szybkosc[1]

    if pilka.right >= 800:
        szybkosc[0] = -szybkosc[0]

    if pilka.left <= 0:
        szybkosc[0] = -szybkosc[0]

    # piłka upadła - odejmij punkt lub zakończ grę
    # gdy gracz nie posiada już żadnych punktów
    elif pilka.bottom >= 600:
        if punkty > 0:
            punkty -= 1
        else:
            exit(0)

    # obsłużymy zderzenie piłki z paletką
    # jeśli paletka trafi w piłkę, dodajemy punkt
    if paletka.colliderect(pilka):
        szybkosc[1] = -szybkosc[1]
        punkty += 1

    ekran.fill((255, 255, 255))

    pygame.draw.circle(ekran, (0, 0, 0), pilka.center, pilka.
    width)
    pygame.draw.rect(ekran, (0, 0, 0), paletka)
    wynik = font.render("Punkty: " + str(punkty), True, (0,
    0, 0))
    ekran.blit(wynik, (10, 10))
```

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

```
    pygame.display.flip()
    pygame.time.delay(15)
```

Omówienia wymaga metoda blit(), wykorzystana do nakładania obiektu punktów na powierzchnię gry. Służy ona do rysowania obiektów w oknie gry i ma postać *screen.blit(wynik,(x,y))*, gdzie **wynik** to obiekt, który ma być umieszczony na ekranie gry, zaś (x, y) to pozycja w oknie, od której zostanie on umieszczony w oknie gry.



Rysunek 3.9: Gotowa gra

3.4 Podsumowanie

W rozdziale zostały opisane podstawy wykorzystania biblioteki PyGame. W ramach rozdziału zostały zaprezentowane absolutne podstawy wykorzystania biblioteki. W praktyce, biblioteka jest na tyle rozbudowana, że pozwala na programowani o wiele bardziej skomplikowanych projektów. Celem tego rozdziału było jednak zaznajomienie czytelnika z absolutnymi podstawami. W ramach praktyki stworzyliśmy także prostą grę typu „pong", którą można rozbudować o muzykę, grafikę, tryb dwuosobowy, czy lepsze algorytmy toru piłeczki. Mam nadzieję, że zaprezentowane materiały będą zachętą do zgłębienia tematu programowania gier przy pomocy języka Python.

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

4. Potęga potęgi

Weronika Woś

4.1 Wstęp

Potęga potęgi. Tak, tytuł tego rozdziału jest zagadkowy. Składa się z dwóch słów. Drugie ze słów odnosi się do działania matematycznego - potęgowania liczb. Natomiast pierwsze słowo „potęga" mówi o niesamowitych właściwościach, sile tego działania. O tym, jak potęgowanie jest niezwykłe, czytelnik przekona się, gdy pozna bajkę o królu, szachach i ziarnach pszenicy. Żeby jednak ją dobrze zrozumieć zaczniemy od przypomnienia takich pojęć, jak działanie potęgi oraz ciąg geometryczny. Zapraszam!

4.2 Co to jest potęga?

W tym podrozdziale podane są podstawowe własności potęg. We wszystkich poniższych twierdzeniach założono, że a jest liczbą nieujemną, to znaczy $a \geq 0$. Wartości potęg x oraz y, występujące we wzorach, mogą być dowolne - będziemy jednak rozważać te wyłącznie naturalne.

Definicja 4.1 — Potęga. Niech a będzie liczbą nieujemną (tzn. $a \geq 0$) oraz niech n będzie liczbą naturalną (tzn. $n = 1, 2, 3, \dots$).

Norway grants

Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).

Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

Wtedy **potęgą** n liczby a nazywamy wartość $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ \ldots \ a}_{n \text{ razy}}$.

Liczbę a nazywamy **podstawą** potęgi, natomiast liczbę n nazywamy **wykładnikiem** potęgi.

Działanie potęgowania ma wiele ważnych i przydatnych własności. Poniżej zaprezentowane są twierdzenia wraz z przykładami, które te własności ilustrują.

Twierdzenie 4.1

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

■ **Przykład 4.1**

$$\begin{aligned} 2^2 \cdot 2^3 &= (2^2) \cdot (2^3) = (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) \\ &= (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^5 = 2^{2+3} \end{aligned}$$

■

Twierdzenie 4.2

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

■ **Przykład 4.2**

$$\frac{3^4}{3^2} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 3} = 3 \cdot 3 = 3^2 = 3^{4-2}$$

■

Twierdzenie 4.3

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

■ **Przykład 4.3**

$$\begin{aligned} (4^2)^3 &= (4^2) \cdot (4^2) \cdot (4^2) = (4 \cdot 4) \cdot (4 \cdot 4) \cdot (4 \cdot 4) \\ &= 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^6 = 4^{2 \cdot 3} \end{aligned}$$

■

Norway grants

Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).

Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

Twierdzenie 4.4

$$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$$

■ **Przykład 4.4**

$$(5 \cdot 3)^2 = (5 \cdot 3) \cdot (5 \cdot 3) = 5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 = 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 = 5^2 \cdot 3^2$$

■

Twierdzenie 4.5

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

■ **Przykład 4.5**

$$\left(\frac{4}{5}\right)^3 = \left(\frac{4}{5}\right) \cdot \left(\frac{4}{5}\right) \cdot \left(\frac{4}{5}\right) = \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4}{5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{4^3}{5^3}$$

■

Twierdzenie 4.6

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

■ **Przykład 4.6** Rozważmy liczbę $A = \frac{7^3}{7^5}$.
Wtedy, wykorzystując Twierdzenie 4.2, otrzymamy, że

$$A = \frac{7^3}{7^5} = 7^{3-5} = 7^{-2}$$

Z drugiej strony

$$A = \frac{7^3}{7^5} = \frac{7 \cdot 7 \cdot 7}{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7} = \frac{1}{7 \cdot 7} = \frac{1}{7^2}$$

Zatem

$$A = 7^{-2} = \frac{1}{7^2}$$

■

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

Twierdzenie 4.7

$$a^{\frac{1}{x}} = \sqrt[x]{a}$$

■ **Przykład 4.7** Rozważmy liczbę $A = 3^{\frac{1}{5}}$. Policzymy wartość wyrażania A^5. Korzystając z Twierdzenia 4.3 mamy

$$A^5 = \left(3^{\frac{1}{5}}\right)^5 = 3^{\frac{1}{5}\cdot 5} = 3^1 = 3$$

Zatem $A^5 = 3$, a stąd wynika, że $A = \sqrt[5]{3}$, czyli

$$3^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{3}$$

■

Twierdzenie 4.8

$$a^{-\frac{x}{y}} = \frac{1}{\sqrt[y]{a^x}}$$

■ **Przykład 4.8** W tym przykładzie, nad niektórymi symbolami równości, zamieszczone są numery twierdzeń, z których trzeba skorzystać w trakcie przekształceń.

$$4^{-\frac{2}{3}} = 4^{\frac{2}{3}\cdot(-1)} \overset{\text{Tw. 4.3}}{\longrightarrow} \left(4^{\frac{2}{3}}\right)^{-1} \overset{\text{Tw. 4.6}}{=} \frac{1}{4^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{1}{4^{2\cdot\frac{1}{3}}} \overset{\text{Tw. 4.3}}{=} \frac{1}{(4^2)^{\frac{1}{3}}} \overset{\text{Tw. 4.7}}{=} \frac{1}{\sqrt[3]{4^2}}$$

■

Rysunek 4.1: Przy liczeniu potęg często przydaje się kalkulator

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

4.3 Nazwy dużych liczb

W tej krótkiej sekcji podane będą nazwy liczebników głównych potęg tysiąca, nazywanych tutaj po prostu dużymi liczbami. Nazwy te odnoszą się do liczb o podstawie 10 i wykładniku naturalnym, będącym krotnością trójki, takich jak: 10^3, 10^6, 10^9 (czyli tysiąc, milion, miliard) i wyższych.

Liczba	**Liczebnik**
10^3	tysiąc
10^6	milion
10^9	miliard
10^{12}	bilion
10^{15}	biliard
10^{18}	trylion
10^{21}	tryliard
10^{24}	kwadrylion
10^{27}	kwadryliard
10^{30}	kwintylion
10^{60}	decylion
10^{600}	centylion

Tablica 4.1: Nazwy dużych liczb

Wykorzystamy tę tabelkę w dalszej części.

4.4 Ciąg geometryczny

Własności potęg, przypomniane w poprzednim paragrafie, są bardzo przydatne w zrozumieniu pojęcia **ciągu geometrycznego**.

Definicja 4.2 Załóżmy, że dany jest ciąg liczbowy $a_n = a_1, a_2, a_3, \ldots$ (ciąg może być skończony lub nieskończony). Ciąg ten jest **geometryczny**, jeżeli istnieje stała q, zwana **ilorazem ciągu**, dla której zachodzi wzór

$$a_n = a_{n-1} \cdot q \qquad \text{dla każdego } n \geq 2$$

Inaczej mówiąc **ciąg geometryczny** jest to ciąg liczbowy a_n, którego każdy kolejny wyraz, od drugiego począwszy, jest iloczynem wyrazu poprzedniego i pewnej stałej q, nazywanej **ilorazem ciągu**.

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

Twierdzenie 4.9 Jeżeli $q \neq 0$, a także $a_1 \neq 0$, to powyższy wzór można zapisać w postaci

$$q = \frac{a_n}{a_{n-1}},$$

co tłumaczy nazwę liczby q.

■ **Przykład 4.9** Dany jest ciąg geometryczny $a_n = 3, 9, 27, 81, 243, \ldots$.
Iloraz tego ciągu jest równy 3, czyli $q = 3$.
Pierwszy wyraz ciągu jest równy 3, czyli $a_1 = 3$.
Drugi wyraz ciągu jest równy 9, czyli $a_2 = 9$.
Trzeci wyraz ciągu jest równy 27, czyli $a_3 = 27$. ■

Twierdzenie 4.10 Jeżeli a_n jest ciągiem geometrycznym, a q ilorazem tego ciągu, to dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$ zachodzi wzór na n-ty wyraz ciągu:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}. \tag{4.1}$$

W powyższym twierdzeniu widać związek ciągu geometrycznego z potęgowaniem. Mianowicie, każdy wyraz a_n ciągu może być obliczony jako iloczyn pierwszego wyrazu a_1 i n-tej potęgi ilorazu q. Zatem jeżeli znamy pierwszy wyraz ciągu i iloraz ciągu geometrycznego możemy obliczyć dowolny wyraz tego ciągu.

■ **Przykład 4.10** Pierwszy wyraz ciągu geometrycznego o ilorazie $q = 5$ jest równy 3. Obliczymy dziesiąty wyraz ciągu a_{10}. Mamy wszystkie dane, aby skorzystać ze wzoru (4.1) na n-ty wyraz ciągu

$$a_{10} = 3 \cdot 5^{10-1} = 5\ 859\ 375.$$

■

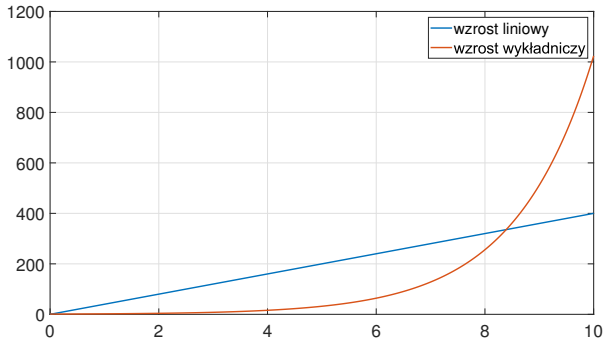
Powyższy przykład pokazuje pewną bardzo ważną cechę ciągów geometrycznych. Otóż, jeżeli iloraz q jest większy od jedynki, to kolejne wyrazy ciągu bardzo szybko rosną. Nazywamy to **wzrostem wykładniczym**.

Spójrzmy na rysunek 4.2. Zestawione są na nim wzrost liniowy i wykładniczy. Wzrost liniowy zakłada, że dane zjawiska przyrastają zawsze z taką samą dynamiką, która przypada na określoną jednostkę czasu. Przykładowo, jeśli w ciągu jednej godziny fabryka może wyprodukować X jednostek produktu, to suma wyprodukowanych jednostek w ciągu 5 godzin będzie wynosiła $X+X+X+X+X = 5X$. To prosta

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

zależność, którą znamy wszyscy i posługujemy się nią w codziennym życiu.

Z kolei wzrost wykładniczy oznacza, że pewne zmiany zachodzą na początku stosunkowo wolno, a po jakimś czasie bardzo szybko. Taka dynamika wzrostu może często być zaskakująca. Jak można zauważyć na rysunku 4.2, wzrost wykładniczy przez jakiś czas jest wolniejszy od liniowego i wydaje się, że są to bardzo powolne zmiany. Jednak po przekroczeniu pewnej wartości, czerwona linia wykazuje bardzo gwałtowny, szybki wzrost. Ta właśnie cecha decyduje o **potędze potęgi**, o której jest mowa w tytule rozdziału.



Rysunek 4.2: Wzrost wykładniczy w porównaniu do wzrostu liniowego

Twierdzenie 4.11 Każdy wyraz ciągu geometrycznego, z wyjątkiem pierwszego (i ostatniego dla ciągu skończonego), jest średnią geometryczną wyrazu poprzedniego i następnego:

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}.$$

Załóżmy, że mamy ciąg geometryczny $a_n = a_1, a_2, a_3, \ldots$. Wtedy możemy obliczyć sumę n składników tego ciągu $S_n = \underbrace{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}_{\text{n - składników}}$.

Twierdzenie 4.12 Suma n kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego a_n wyraża się wzorem:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \qquad \text{dla} \qquad q \neq 1, \tag{4.2}$$

$$S_n = a_1 \cdot n \qquad \text{dla} \qquad q = 1.$$

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

■ **Przykład 4.11** Obliczmy sumę pierwszych 10-ciu wyrazów ciągu geometrycznego $a_n = 1, 5, 25, 125, 625, \ldots$. Dla tego ciągu mamy zatem $a_1 = 1$, $q = 5$, oraz $n = 10$. Możemy skorzystać ze wzoru (4.2) na sumę wyrazów ciągu geometrycznego

$$S_{10} = 1 \cdot \frac{1 - 5^{10}}{1 - 5} = \frac{1 - 9\ 765\ 625}{-4} = 2\ 441\ 406.$$

■

4.5 Bajka o królu, szachach i ziarnach pszenicy

Dawno, dawno temu żył sobie król. Był to władca stary i znudzony. Nie bawiły go turnieje rycerskie, jazda konna, ani nawet fechtunek. Nawet rozniecenie wojny uważał za zajęcie nudne i nie warte jego trudu. Był tak znudzony, że rozesłał wici po całym kraju i do państw ościennych, że kto przyniesie interesującą, ciekawą grę, tego nie minie wysoka nagroda.

Król czekał, czekał i czekał. Aż pewnego dnia zjawił się na zamku pewien człowiek, cudzoziemiec. Przybył i rzekł: „Wielmożny Królu! Mam dla Ciebie grę, dzięki której przestaniesz się tak okropnie nudzić." Tą grą okazały się być szchy. Król był zachwycony: „ Nareszcie! Koniec mojej udręki! Oto gra warta nagrody!"

Rysunek 4.3: Klasyczne szachy o 64 polach

Król postanowił ofiarować nieznajomemu przybyszowi wszystko, czego ten zażąda. Cudzoziemiec poprosił zatem o pozornie skromną

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

nagrodę: „Najjaśniejszy Królu! Pragnę dostać kilka ziaren pszenicy. Widzisz królu tę oto planszę do szachów? Ma ona 64 pola. Pragnę aby na pierwsze pole położono jedno ziarno pszenicy, na drugie pole dwa ziarna pszenicy, na trzecie pole cztery ziarna, na czwarte pole osiem ziaren i tak na każde kolejne pole dwa razy więcej ziaren niż na poprzednie. Niech następnie dadzą mi sumę tych wszystkich ziaren."

Król się tylko zaśmiał! Poprosił jednak cudzoziemca, aby ten powiedział, ile to będzie worków z ziarnem, bo worki wygodniej liczyć. Jednak wtedy nieznajomy tylko powtórzył dokładnie swoją prośbę. Nieco rozbawiony takim zachowaniem król, poszedł więc do swoich matematyków, żeby mu obliczyli, ile worków ziarna żąda ów cudzoziemiec. Gdy matematycy podali mu wynik, to niemal osiwiał! Okazało się bowiem, że jest to ilość ziarna tak ogromna, że ani w jego królestwie, ani nawet na całym znanym świecie nie sposób tyle zgromadzić!

Rysunek 4.4: Ilość ziaren położonych na kilku pierwszych polach

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

Ćwiczenie 4.1 Zobaczmy, o jakiej liczbie ziaren pszenicy mówił sprytny cudzoziemiec. Poniżej przedstawmy dokładnie jego opis:

- na pierwszym polu szachowym kładziemy 1 ziarno pszenicy,
- na drugim polu kładziemy 2 ziarna,
- na trzecim polu kładziemy 4 ziarna,
- na czwartym polu kładziemy 8 ziaren,
- na każde kolejne pole kładziemy dwa razy więcej ziaren niż na poprzednie,
- ...
- postępujemy tak, aż do ostatniego 64-go pola.

Jeżeli dokładnie się przyjrzymy, to zauważymy, że jest to opis ciągu geometrycznego.

- $a_1 = 1$,
- $a_2 = 2 = 1 \cdot 2$,
- $a_3 = 4 = 2 \cdot 2$,
- $a_4 = 8 = 4 \cdot 2$
- ...
- $a_{64} = a_{63} \cdot 2$.

Pierwszy wyraz ciągu geometrycznego, o którym tu mowa, wynosi $a_1 = 1$. Iloraz tego ciągu geometrycznego, czyli liczba przez którą mnożony jest każdy kolejny wyraz, wynosi $q = 2$.
Policzmy zatem, ile ziaren pszenicy powinno być na ostatnim, sześćdziesiątym czwartym polu. W tym celu skorzystamy ze wzoru (4.1):

$$a_{64} = 1 \cdot 2^{64-1} = 2^{63} = 9\ 223\ 372\ 036\ 854\ 775\ 808.$$

Ilość ziaren na ostatnim polu szachowym jest ogromna! A ile ich jest wszystkich? Sumę ziaren policzymy korzystając ze wzoru (4.2) na sumę ciągu geometrycznego:

$$\begin{aligned} S_{64} &= 1 \cdot \frac{1-2^{64}}{1-2} = \frac{1-2^{64}}{-1} = 2^{64} - 1 \\ &= 18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 615 \approx 18,5 \cdot 10^{18}. \end{aligned}$$

Ta liczba jest tak duża, że nawet trudno ją przeczytać. Pomożemy sobie korzystając z Tablicy 4.1. Widzimy, że 10^{18} jest to trylion. Zatem cudzoziemiec poprosił o $18,5$ trylionów ziaren pszenicy!

■

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

Rysunek 4.5: Ziarna pszenicy

Liczba o której mówił nieznajomy jest naprawdę ogromna. Król poprosił o informację, ile to będzie worków z ziarnem. My policzymy natomiast wagę tych ziaren i porównamy z aktualną produkcją tego zboża na świecie. Wykorzystamy w tym celu informację, że tysiąc ziaren pszenicy waży około 40 g.

Ćwiczenie 4.2 Rozpiszmy dokładnie rachunki.

$$\begin{aligned} 1000\,\text{szt} &\leftrightarrow 40\,\text{g} \\ 18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 615\,\text{szt} &\leftrightarrow x\,\text{g} \end{aligned}$$

Korzystając z proporcji otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} x &= \frac{18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 615\,\text{szt} \cdot 40\,\text{g}}{1000\,\text{szt}} \\ &= 737\ 869\ 762\ 948\ 382\ 064,6\,\text{g} \\ &\approx 737\ 869\ 762\ 948\ 382\,\text{kg} \\ &\approx 737\ 869\ 762\ 948\,\text{t} \\ &\approx 737\ 870\,\text{mln t} \end{aligned}$$

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

Pszenica jest dominującym zbożem spożywczym w handlu światowym, ze średnią produkcją roczną na poziomie 650 mln t.

$$k = \frac{737\ 870\,\text{mln t}}{650\,\text{mln t}} \approx 1\,135\,\text{lat}$$

■

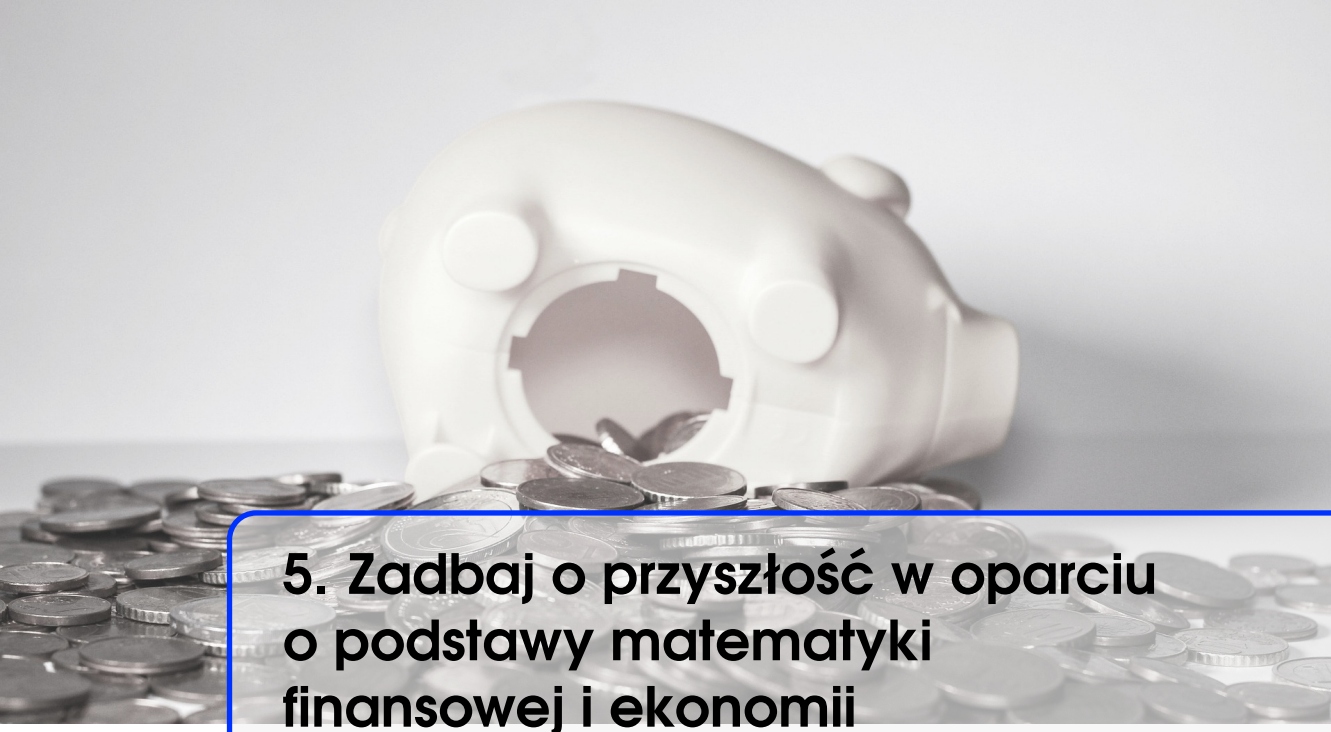
Matematycy królewscy mieli więc rację! Nie dość, że ilość pszenicy przekracza możliwości jakiegokolwiek królestwa, to jest to równowartość zbiorów światowych z ponad tysiąca lat!!!

Oto **POTĘGA POTĘGI**!

Norway grants

Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).

Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.



5. Zadbaj o przyszłość w oparciu o podstawy matematyki finansowej i ekonomii

Maryna Bulakh

5.1 Wstęp

Samodzielność jest potrzebą każdego człowieka. Każdy z nas pragnie mieć wpływ na przebieg swojego życia, decydować o sobie i kontrolować na ile chce (a nie na ile musi) ulegać wpływom zewnętrznym. Rozwój samodzielności osób nieletnich oraz kształtowanie własnego „ja" jest niezwykle ważnym elementem rzutującym na ich przyszłość.

Celem tego opracowania jest więc omówienie sposobów, w jakie możecie - jako uczniowie - wpłynąć na swoją przyszłość w oparciu o podstawy matematyki finansowej i ekonomii. Zacznijmy więc od wyjaśnienia tych dwóch podstawowych pojęć.

Definicja 5.1 — Matematyka finansowa. Rozumiana jest jako gałąź matematyki zajmująca się badaniem zmian, jakie zachodzą we wkładach pieniężnych w czasie. Bada ona przede wszystkim operacje finansowe, w których przepływy pieniężne są wymieniane i mogą podlegać ilościowym wahaniom w czasie. Wynika to z faktu, że kapitał generuje odsetki dzięki czasowi, który spędza na lokacie.

Definicja 5.2 — Ekonomia. Jest nauką o tym, jak jednostka i społeczeństwo decydują o wykorzystaniu zasobów, które mogą mieć także inne, alternatywne zastosowania.

Norway grants

Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).

Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

Za chwilę na przytoczonym przykładzie spróbujemy pokazać, że nie istnieje dokładnie określony wiek, po osiągnięciu którego człowiek ma podjąć decyzję - teraz mam zadbać o swoją przyszłość. Dla każdego jest to coś bardzo indywidualnego.

5.2 Podstawa samodzielności osób nieletnich

Założenia ogólne

Będąc uczniem szkoły podstawowej, liceum bądź technikum oraz kierując się wiedzą uzyskaną z tego opracowania możesz stworzyć indywidualny plan na przyszłość lub po prostu rozszerzyć zakres swoich zainteresowań i umiejętności.

Weźmy dla przykładu Pawła, ucznia szkoły podstawowej, który ma 15 lat i w roku bieżącym ukończy 8 klasę. Kolejnym etapem w życiu Pawła jest wybór szkoły średniej. Ten etap edukacji w Polsce obejmuje młodzież w wieku od 15 do 20 lat i dzieli się na kilka typów szkół: czteroletnie liceum ogólnokształcące, pięcioletnie technikum, trzyletnią branżową szkołę I stopnia i in. Tak więc pierwszą poważną decyzją Pawła będzie wybór placówki i właśnie tu rozpoczyna się pierwszy okres realizacji jego indywidualnego planu na przyszłość. Załóżmy Paweł wybiera technikum (5 lat).

Podstawy prawne podjęcia pracy przez osoby nieletnie

Zgodnie z obowiązującymi przepisami prawa polskiego od 1 września 2018 roku możliwe jest zatrudnianie w oparciu o umowę o pracę osób, które ukończyły 15 rok życia. Uwzględniając powyższe i biorąc pod uwagę nasze założenia stwierdzamy, że Paweł może podjąć pracę. Według Kodeksu pracy czas pracy pracownika do 16. roku życia nie może przekraczać 6 godzin na dobę - w czasie wolnym od nauki szkolnej i 2 godzin na dobę - w czasie trwania roku szkolnego. Natomiast w przypadku pracownika powyżej 16. roku życia nie może przekraczać 8 godzin na dobę. Ile zatem Paweł może zarobić w czasie wakacji?

Pojęcie płaca minimalna oraz wynagrodzenie brutto i netto

Oczywiście nie możemy przewidzieć dokładnych warunków zatrudnienia Pawła, dlatego musimy zapoznać się z pojęciem płacy minimalnej, która stanowi podstawę wielu obliczeń przeprowadzanych przez ekonomistów.

Definicja 5.3 — Płaca minimalna. Prawnie ustalony, najniższy dopuszczalny poziom wynagrodzenia pieniężnego za pracę najemną

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

(na podstawie umowy o pracę) określony w postaci stawki. Od dnia 1 stycznia 2022 r. ustala się minimalną stawkę godzinową w wysokości 19,70 zł brutto.

Następnie musimy uwzględnić dwa pojęcia: wartość wynagrodzenia brutto oraz wartość wynagrodzenia netto.

Definicja 5.4 — Wynagrodzenie brutto. Zawiera podatek i składki ZUS w części obciążającej pracownika, które w dalszym kroku będzie pomniejszone o należne świadczenia publicznoprawne.

Definicja 5.5 — Wynagrodzenie netto. Wypłacone pracownikowi po potrąceniu zobowiązań składkowych i podatkowych. Żeby obliczyć wartość wynagrodzenia netto w pierwszej kolejności należy ustalić wynagrodzenie brutto, jakie ma otrzymywać pracownik, zgodnie z zapisem dotyczącym wynagrodzenia w zawartej umowie o pracę.

Jak ustaliliśmy wcześniej, Paweł może pracować w okresie wakacyjnym 6 godzin dziennie, a stawka godzinowa wynosi 19,70 zł brutto. Przy takim założeniu uzyskane przez Pawła wynagrodzenie możemy obliczyć według wzoru:

$$W_b = d_r \times h_p \times S_p \tag{5.1}$$

gdzie: W_b – wartość wynagrodzenia brutto; d_r – liczba dni roboczych; h_p – godziny pracy; S_p – stawka płac.

Wartości średnie

Ponieważ jest to tylko prognoza ewentualnej wysokości dochodów Pawła, możemy dla liczby d_r zastosować średnie wartości. W tablicy 5.1 została przedstawiona liczba dni roboczych w kolejnych miesiącach roku 2022. Jak widzimy suma dni roboczych w roku 2022 wynosi 251. Po podzieleniu tej wartości przez 12 miesięcy otrzymamy wynik równy 20,92 (w przybliżeniu 21 dni).

Definicja 5.6 — Średnia wartość. Jest to średnia arytmetyczna obliczana poprzez dodanie grupy liczb, a następnie podzielenie otrzymanej sumy przez ich liczbę. Na przykład średnią liczb 2, 3, 3, 5, 7 i 10 jest wartość 30 podzielona przez 6, czyli 5.

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

Miesiąc	Liczba dni roboczych
Styczeń 2022	19
Luty 2022	20
Marzec 2022	23
Kwiecień 2022	20
Maj 2022	21
Czerwiec 2022	21
Lipiec 2022	21
Sierpień 2022	22
Wrzesień 2022	22
Październik 2022	21
Listopad 2022	20
Grudzień 2022	21
Razem	251

Tablica 5.1: Liczba dni roboczych w roku 2022

5.3 Ustalenie wynagrodzenia

Obliczanie wynagrodzenia wg wcześniejszych założeń

Mając przewidywaną liczbę godzin możemy obliczyć miesięczne wynagrodzenie brutto:

$$W_b = 21 \times 6 \times 19,70 = 2482,20$$

W drugim kroku należy obliczyć (od określonej płacy brutto) składki na ubezpieczenie społeczne, finansowane przez pracownika i odjąć je od kwoty brutto. Składki społeczne (S_s) wynoszą kolejno:

- składka emerytalna (S_{em}) – 9,76%;
- składka rentowa (S_r) – 1,5%;
- składka chorobowa (S_{ch}) – 2,45%.

Dokonajmy teraz obliczeń wysokości kolejnych składek społecznych:

$$\begin{aligned} S_{em} &= 2482,20 \times 9,76\% = 242,26 \\ S_r &= 2482,20 \times 1,5\% = 37,23 \\ S_{ch} &= 2482,20 \times 2,45\% = 60,81 \end{aligned}$$

Tak więc łącznie składki społeczne wynoszą:

$$S_s = 242,26 + 37,23 + 60,81 = 340,30$$

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

Następnie obliczamy składkę zdrowotną. Po odjęciu od wynagrodzenia brutto składek społecznych otrzymujemy podstawę do obliczenia składki na ubezpieczenie zdrowotne (P_{uz}).

$$P_{uz} = W_b - S_p \tag{5.2}$$

Obliczenia:

$$P_{uz} = 2482,20 - 340,30 = 2141,90$$

Składka zdrowotna (S_{zd}) wynosi 9%:

$$S_{zd} = 2141,90 \times 9\% = 192,77.$$

Kolejnym krokiem jest obliczenie zaliczki na podatek dochodowy. W tym celu, należy od kwoty brutto odjąć składki społeczne i składkę zdrowotną, dzięki czemu uzyskujemy podstawę podlegającą opodatkowaniu (P_{pd}):

$$P_{pd} = 2482,20 - 340,30 - 192,77 = 1949,13.$$

Zgodnie z Ustawą z dnia 26 lipca 1991 r. o podatku dochodowym od osób fizycznych Paweł zostanie zwolniony z podatku dochodowego. Powyższy przepis dotyczy przychodów nabywanych ze stosunku pracy do ukończenia 26. roku życia.

Obliczenie wynagrodzenia za pomocą MS Excel

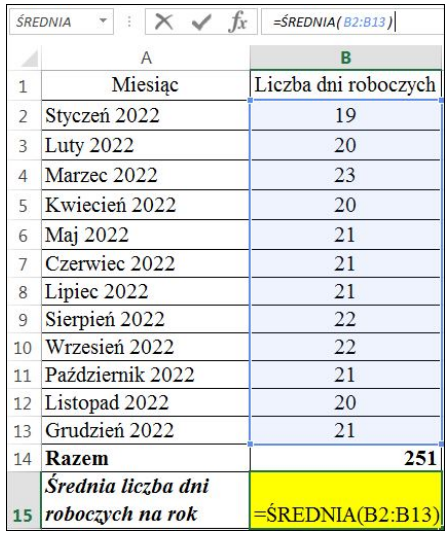
Ponieważ żyjemy w epoce komputeryzacji niemal wszystkich obszarów działalności społecznej, obliczenia te w dużym stopniu upraszcza stosowanie komputera, a zwłaszcza możliwości, które zawiera MS Excel. Sporządzenie arkusza kalkulacyjnego pozwoli na szybkie przeliczanie kwot, również po uwzględnieniu zmian wartości zmiennych (np. zmiana stawki płac, wysokości składek, liczby godzin pracy itp.).

Zacznijmy od najprostszej tabeli – obliczenie średniej liczby dni roboczych. W tym celu otwórz arkusz kalkulacyjny, wpisz nazwy kolumn i wierszy z tablicy 5.1 oraz ich wartości. W komórce ostatniego wiersza z nazwą „Razem" (na przedstawionym rysunku 5.1 jest to komórka B14) wpisz znak równości i funkcję „SUMA". W argumencie funkcji zaznacz wszystkie wartości, które mają zostać zsumowane. Aby obliczyć średnią liczbę dni roboczych, w komórce B15 wpisz znak równości i funkcję „ŚREDNIA". W argumencie funkcji zaznacz wszystkie wartości, które mają być uwzględnione w średniej. Posługuj się rysunkiem 5.2.

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

	A	B
1	Miesiąc	Liczba dni roboczych
2	Styczeń 2022	19
3	Luty 2022	20
4	Marzec 2022	23
5	Kwiecień 2022	20
6	Maj 2022	21
7	Czerwiec 2022	21
8	Lipiec 2022	21
9	Sierpień 2022	22
10	Wrzesień 2022	22
11	Październik 2022	21
12	Listopad 2022	20
13	Grudzień 2022	21
14	**Razem**	**=SUMA(B2:B13)**

Rysunek 5.1: Stosowanie funkcji „SUMA” w MS Excel

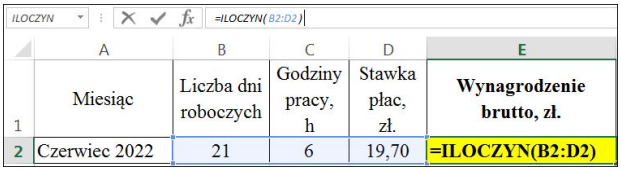


	A	B
1	Miesiąc	Liczba dni roboczych
2	Styczeń 2022	19
3	Luty 2022	20
4	Marzec 2022	23
5	Kwiecień 2022	20
6	Maj 2022	21
7	Czerwiec 2022	21
8	Lipiec 2022	21
9	Sierpień 2022	22
10	Wrzesień 2022	22
11	Październik 2022	21
12	Listopad 2022	20
13	Grudzień 2022	21
14	**Razem**	**251**
15	***Średnia liczba dni roboczych na rok***	=ŚREDNIA(B2:B13)

Rysunek 5.2: Stosowanie funkcji „ŚREDNIA” w MS Excel

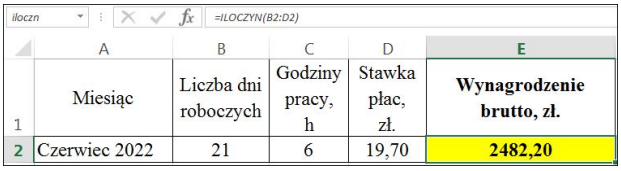
Następnie w celu szybkiego obliczenia wynagrodzenia brutto otwórz arkusz kalkulacyjny i wpisz nazwy kolumn zgodnie ze wzorem 5.1 (miesiąc; liczba dni roboczych; godziny pracy; stawka płac) oraz ich wartości. Wysokość wynagrodzenia brutto uzyskasz jeśli w kolejnej komórce E2 (rys. 5.3) wpiszesz znak równości i funkcję „ILOCZYN”. W argumencie funkcji zaznacz wszystkie wartości, które mają być przemnożone. Po przyciśnięciu klawisza „ENTER” uzyskasz szukaną

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli” współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.



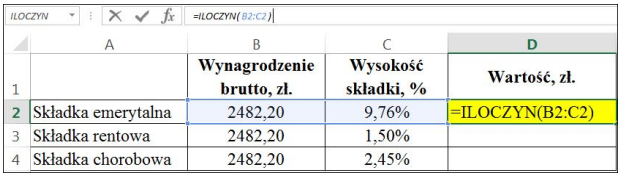
Rysunek 5.3: Stosowanie funkcji „ILOCZYN" w MS Excel

wartość wynagrodzenia (rys. 5.4). Aby dokonać obliczeń wartości



Rysunek 5.4: Wartość wynagrodzenia brutto obliczona w MS Excel

wynagrodzenia netto otwórz arkusz kalkulacyjny i wpisz nazwy wierszy, czyli nazwy składek społecznych (składka emerytalna, rentowa i chorobowa) oraz ich wysokość, zgodnie z rysunkiem 5.5. Wiedząc, jak korzystać z funkcji „ILOCZYN" w MS Excel, wpisz ją w kolumnie „Wartość". Następnie, żeby obliczyć wartości wszystkich składek,

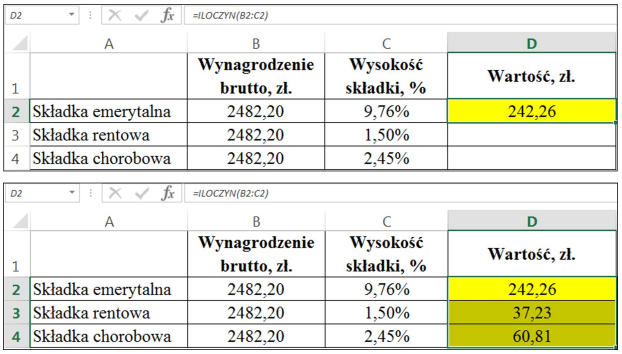


Rysunek 5.5: Sporządzenie arkusza kalkulacyjnego dla obliczenia wartości składek w MS Excel

możesz skopiować funkcję "ILOCZYN". Zaznacz komórkę D2 (rys. 5.6), po czym w prawym dolnym rogu przytrzymaj lewy klawisz myszy i przeciągnij w dół. Dotyczy to wszystkich działań prowadzonych w programie MS Excel.

W dalszej kolejności oblicz łączną kwotę składek społecznych korzystając z funkcji „SUMA" oraz rysunku 5.7.

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.



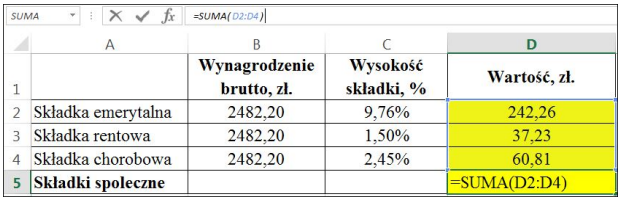
D2 =ILOCZYN(B2:C2)

	A	B	C	D
1		Wynagrodzenie brutto, zł.	Wysokość składki, %	Wartość, zł.
2	Składka emerytalna	2482,20	9,76%	242,26
3	Składka rentowa	2482,20	1,50%	
4	Składka chorobowa	2482,20	2,45%	

D2 =ILOCZYN(B2:C2)

	A	B	C	D
1		Wynagrodzenie brutto, zł.	Wysokość składki, %	Wartość, zł.
2	Składka emerytalna	2482,20	9,76%	242,26
3	Składka rentowa	2482,20	1,50%	37,23
4	Składka chorobowa	2482,20	2,45%	60,81

Rysunek 5.6: Kopiowanie funkcji w MS Excel

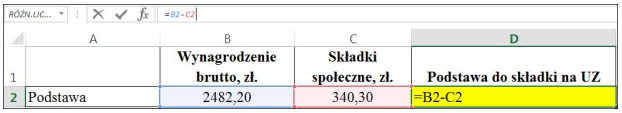


SUMA =SUMA(D2:D4)

	A	B	C	D
1		Wynagrodzenie brutto, zł.	Wysokość składki, %	Wartość, zł.
2	Składka emerytalna	2482,20	9,76%	242,26
3	Składka rentowa	2482,20	1,50%	37,23
4	Składka chorobowa	2482,20	2,45%	60,81
5	**Składki społeczne**			=SUMA(D2:D4)

Rysunek 5.7: Obliczenie łącznej kwoty składek społecznych w MS Excel

Następnie wyznacz podstawę do obliczenia składki na ubezpieczenie zdrowotne oraz jej wartość. Aby to zrobić, w komórce D2 wpisz znak równości i „B2-C2", jak przedstawiono na rysunku 5.8.



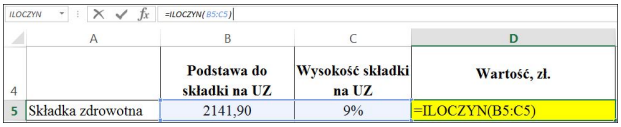
RÓŻN.LIC... =B2-C2

	A	B	C	D
1		Wynagrodzenie brutto, zł.	Składki społeczne, zł.	Podstawa do składki na UZ
2	Podstawa	2482,20	340,30	=B2-C2

Rysunek 5.8: Obliczenie podstawy dla składki na ubezpieczenie zdrowotne w MS Excel

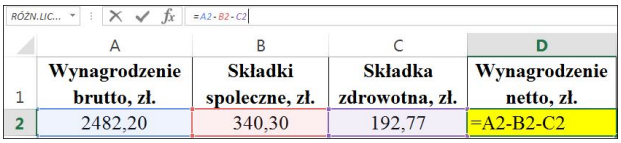
Mając podstawę potrzebną do obliczenia składki na ubezpieczenie zdrowotne i korzystając z funkcji „ILOCZYN" wpisz odpowiednie dane do komórek arkusza i sprawdź to z rysunkiem 5.9.

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.



Rysunek 5.9: Obliczenie składki na ubezpieczenie zdrowotne w MS Excel

Po wprowadzeniu do arkusza kalkulacyjnego wartości wynagrodzenia brutto oraz składek, wpisz w komórce D2 różnice kwot zgodnie z rysunkiem 5.10. W taki sposób otrzymasz kwotę wynagrodzenia netto.



Rysunek 5.10: Obliczenie składki na ubezpieczenie zdrowotne w MS Excel

Biorąc pod uwagę powyższe obliczenia możemy stwierdzić, że miesięczne wynagrodzenie netto Pawła wyniesie 1949,13 zł, natomiast w okresie wakacyjnym będzie mógł zarobić:

$$1949,13 \times 2 = 3898,26.$$

5.4 Zarządzanie kapitałem

Jak pomnożyć posiadany kapitał

Omówimy zagadnienie lokowania pieniędzy w banku. Dla ułatwienia ograniczymy się do najprostszej sytuacji, gdy oprocentowanie lokaty jest stałe. Uzyskane przez Pawła wynagrodzenie 3898,26 zł – jest kapitałem, który może on zlokalizować w banku na czas określony umową, jak również zainwestować w działalność przedsiębiorstwa. Załóżmy, że kwotę 398,26 zł Paweł przeznacza na wycieczkę i musi pojąć decyzję dotyczącą pozostałego kapitału, czyli 3500 zł. Do dyspozycji Pawła są następujące propozycje:

I. lokata w banku, gdzie procent prosty wynosi 4%, kapitalizacja – na koniec okresu;
II. lokata w banku, gdzie procent składany wynosi 0,7%, kapitalizacja – co miesiąc;

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

III. inwestycja w działalność przedsiębiorstwa, która przyniesie zysk 200 zł.

W celu podjęcia najkorzystniejszej decyzji, Paweł musi ocenić każdą z otrzymanych propozycji. Konieczne będzie tu wyjaśnienie kilku pojęć.

Definicja 5.7 — Procent prosty. Odsetki naliczane są od kapitału, co pewien ustalony czas i nie są do tego kapitału dopisywane, zatem za każdym razem otrzymujemy tyle samo odsetek i stan naszych oszczędności tworzy postęp arytmetyczny.

Definicja 5.8 — Procent składany. Do kapitału są dopisywane odsetki naliczone od kapitału, a zatem następnym razem odsetki liczone są od nowego, większego kapitału. Stan naszych oszczędności tworzy więc postęp geometryczny.

Definicja 5.9 — Kapitalizacja odsetek. Polega na dopisaniu odsetek do kapitału.

Ocena i porównanie opcji powiększania kapitału

Załóżmy, że Paweł lokuje swój kapitał w banku na okres 10 miesięcy, tak abyśmy mogli obliczyć kapitał zgromadzony w ciągu roku.

Ocenę pierwszej propozycji możemy przeprowadzić w sposób dość prosty, a mianowicie korzystając z wiedzy o sposobie obliczania udziału (procentu) od określonej kwoty. Wysokość odsetek lokaty (4% od kwoty 3500 zł) wyniesie 140,00 zł:

$$P = \frac{3500,00 \times 4}{100} = 140,00$$

W wyniku wyboru tej opcji, po kapitalizacji odsetek, kapitał Pawła wzrośnie do 3640,00 zł.

Celem oceny drugiej propozycji sugeruję skorzystać z podstaw matematyki finansowej, zwłaszcza wzoru do obliczania wartości kapitału po kapitalizacji odsetek, naliczanych sposobem procentu składanego:

$$K = K_p \times \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n \tag{5.3}$$

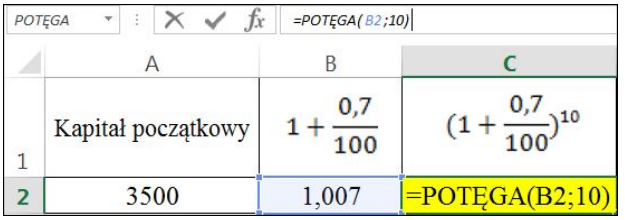
gdzie: K_p - to kapitał początkowy (w podanym przykładzie - 3500,00 zł); r - stopa procentowa (w podanym przykładzie – 0,7%); n - liczba miesięcy kapitalizacji odsetek (w podanym przykładzie – 10).

$$K = 3500 \times \left(1 + \frac{0,7}{100}\right)^{10}$$

$$K = 3500 \times 1,007^{10} = 3500 \times 1,072247 = 3752,86$$

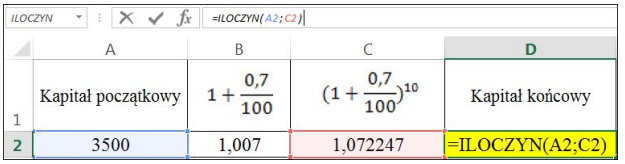
Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

Podobnie jak poprzednio możesz uprościć obliczenia korzystając z możliwości MS Excel. Wpisz do arkusza wartość kapitału początkowego i wartość uzyskaną po obliczeniu dodawania w nawiasie. Aby podnieść liczbę do potęgi skorzystaj z funkcji „POTĘGA". W tym celu wpisz w odpowiedniej komórce znak równości i wybierz funkcję „POTĘGA", natomiast w argumencie zaznacz komórkę, która zawiera odpowiednią liczbę oraz potęgę, do której masz tę liczbę podnieść. Posługuj się rysunkiem 5.11.



Rysunek 5.11: Stosowanie funkcji „POTĘGA" w MS Excel

W celu uzyskania wartości kapitału końcowego przemnóż kapitał początkowy przez uzyskaną wartość, tak jak pokazano na rysunku 5.12.



Rysunek 5.12: Obliczenie kapitału uzyskanego pod warunkiem akceptacji drugiej propozycji w MS Excel

Ostateczną decyzję podejmujemy ma podstawie porównania uzyskanych kwot. Jak widzimy poniżej, najbardziej korzystną dla Pawła będzie druga propozycja, która pozwoli mu na uzyskanie największych odsetek.

$$3640 < 3752,86 > 3700$$

5.5 Kontynuacja gromadzenia kapitału

Praca w czasie roku szkolnego

Oprócz decyzji o zarządzaniu już posiadanym kapitałem Paweł powinien zastanowić się, jak rozdysponować swój czas wolny od lekcji w ciągu roku szkolnego. Jak już wiemy może on podjąć pracę w wymiarze

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

2 godzin dziennie. Korzystając więc ze wzoru 5.1 możemy obliczyć wynagrodzenie brutto otrzymane w czasie trwania roku szkolnego. Wprowadź odpowiednie zmiany do arkusza i sprawdź uzyskane wartości z poniższymi obliczeniami. Mając przewidywaną liczbę godzin możesz obliczyć miesięczne wynagrodzenie brutto:

$$W_b = 21 \times 2 \times 19,70 = 827,40$$

Spróbuj samodzielnie obliczyć wynagrodzenie netto. W tym celu oblicz wysokości składek:

$$\begin{aligned} S_{em} &= 827,40 \times 9,76\% = 80,75 \\ S_r &= 827,40 \times 1,5\% = 12,41 \\ S_{ch} &= 827,40 \times 2,45\% = 20,27 \end{aligned}$$

Jak widzimy składki społeczne wynoszą łącznie:

$$S_s = 80,75 + 12,41 + 20,27 = 113,43$$

Podstawa do obliczenia składki na ubezpieczenie zdrowotne:

$$P_{uz} = 827,40 - 113,43 = 713,97$$

Składka zdrowotna wynosi 9%:

$$\begin{aligned} S_{zd} &= 713,97 \times 9\% = 64,26 \\ P_{pd} &= 827,40 - 113,43 - 64,26 = 649,71 \end{aligned}$$

Miesięczne wynagrodzenie netto Pawła wyniesie 649,71 zł, a w okresie całego roku szkolnego będzie mógł zarobić:

$$649,71 \times 10 = 6497,10$$

Łączny dochód Pawła w pierwszym roku zatrudnienia wyniesie 10249,96 zł. Następnie - posiadając już wiedzę o tym, jakie masz możliwości powiększenia posiadanego kapitału - możesz przeanalizować różne warianty lokat lub inwestycji oraz ocenić ich wartość ekonomiczną.

Zmiana warunków pracy i kapitał drugiego roku

Jeśli uważnie przeczytałeś podstawowe informacje o Pawle wiesz, że w kolejnym okresie wakacyjnym będzie on mógł podjąć pracę na innych warunkach - 8 godzin dziennie. Jednak brakuje informacji dotyczącej wysokości wynagrodzenia minimalnego na kolejne lata. Podobnie jak

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

w przypadku założenia przewidywanej liczby godzin przepracowanych przez Pawła w ciągu miesiąca możesz skorzystać z podstaw ekonomii oraz matematyki finansowej i prognozować wysokość wynagrodzenia, obliczając średni roczny przyrost. W tym celu uwzględnić należy wysokość minimalnej stawki godzinowej z ostatnich lat.

Minimalna stawka godzinowa w 2019 r. wynosiła 14,70 zł na godzinę, natomiast w 2018 r. było to 13,70 zł, czyli wzrosła o 1,00 zł. Jeśli obliczysz udział 1,00 zł w 13,70 zł (U = 1 x 100 : 13,7 = 7,3) uzyskasz wysokość wzrostu tej wartości w procentach. Posługując się tym schematem przeprowadź obliczenia i sprawdź uzyskane wyniki z niższą tablicą 5.2.

Obowiązywała od	**Minimalna stawka godzinowa**	**Przyrost w wymiarze absolutnym, zł**	**Przyrost w wymiarze procentowym, %**
01.01.2022	19,70	1,4	7,65
01.01.2021	18,30	1,3	7,64
01.01.2020	17,00	2,3	15,65
01.01.2019	14,70	1,0	7,30
01.01.2018	13,70	-	-
Średnie wartości	-	1,50	9,50

Tablica 5.2: Minimalna stawka godzinowa w latach 2018-2022 i średnie wartości jej przyrostu

Korzystając z powyższych informacji, możesz przyjąć stawkę minimalną na przyszły rok w wysokości 21,20 zł (19,70 zł + 1,50 zł = 21,20 zł) i przeprowadzić podobne obliczenia przewidywanych zarobków Pawła uzyskanych w czasie kolejnych 5 lat nauki w technikum. Poniżej przedstawiono obliczenia przewidywanych zarobków w drugim roku nauki. Obliczenie wynagrodzenia:

$$W_b = 21 \times 8 \times 21,20 = 3561,60$$

Składki społeczne wynoszą:

$$S_{em} = 3561,60 \times 9,76\% = 347,61$$
$$S_r = 3561,60 \times 1,5\% = 53,42$$
$$S_{ch} = 3561,60 \times 2,45\% = 87,26$$

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

Łączna wysokość składek społecznych:

$$S_s = 347,61 + 53,42 + 87,26 = 488,29$$

Składka zdrowotna:

$$P_{uz} = 3561,60 - 488,29 = 3073,31$$
$$S_{zd} = 30,73,31 \times 9\% = 276,60$$
$$P_{pd} = 3561,60 - 488,29 - 276,60 = 2796,71$$

Z powyższych obliczeń wynika, że miesięczne wynagrodzenie netto Pawła wyniesie 2796,71 zł, natomiast w całym okresie wakacyjnym będzie mógł zarobić 5593,42 zł. Ponieważ praca Pawła podczas trwania roku szkolnego pozostaje ograniczona do 2 godzin dziennie, spróbuj samodzielnie obliczyć wynagrodzenie netto i sprawdzić swoje wyniki z poniższymi wartościami.

$$W_b = 21 \times 2 \times 21,20 = 890,40$$

Sprawdź wysokości składek:

$$S_{em} = 890,40 \times 9,76\% = 86,90$$
$$S_r = 890,40 \times 1,5\% = 13,36$$
$$S_{ch} = 890,40 \times 2,45\% = 21,81$$
$$S_s = 86,90 + 13,36 + 21,81 = 122,07$$

Podstawa do obliczenia składki na ubezpieczenie zdrowotne:

$$P_{uz} = 890,40 - 122,07 = 768,33$$
$$S_{zd} = 768,33 \times 9\% = 69,15$$
$$P_{pd} = 890,40 - 122,07 - 69,15 = 699,18$$

Miesięczne wynagrodzenie netto wyniesie 699,18 zł, a w okresie całego roku szkolnego będzie mógł zarobić 6991,80 zł. Łączny dochód Pawła ze stosunku pracy w drugim roku zatrudnienia wyniesie zatem 12585,22 zł.

Zarobki kolejnych lat

Ponieważ w ciągu trzeciego, czwartego i piątego roku żaden z warunków pracy Pawła (oprócz wysokości stawki) nie będzie podlegać zmianie, w celu obliczenia dochodów możemy dochód uzyskany w ostatnim

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

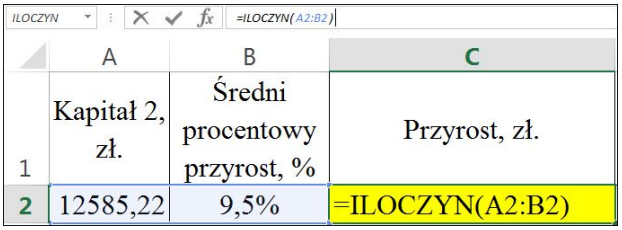
roku zwiększyć, uwzględniając jednocześnie średni procentowy przyrost stawki minimalnej obliczony w tablicy 5.2 i korzystając ze wzoru:

$$K_n = K_{n-1} \times (1 + 9,5\%) \tag{5.4}$$

Dane z tablicy 5.2 podstawiamy do powyższego wzoru.

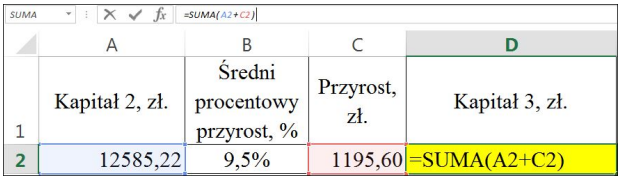
$$K_3 = 12585,22 \times (1 + 9,5\%) = 13780,82$$
$$K_4 = 13780,82 \times (1 + 9,5\%) = 15089,99$$
$$K_5 = 15089,99 \times (1 + 9,5\%) = 16523,54$$

Do obliczeń możesz wykorzystać arkusz kalkulacyjny. Aby to zrobić wpisz nazwy kolumn (kapitał 2, średni procentowy przyrost) oraz ich wartości. Kolejną kolumnę nazwij „Przyrost", a do odpowiedniej komórki (C2) wpisz funkcję „ILOCZYN", jak przedstawiono na rysunku 5.13.



Rysunek 5.13: Obliczenie wysokości przyrostu kapitału w MS Excel

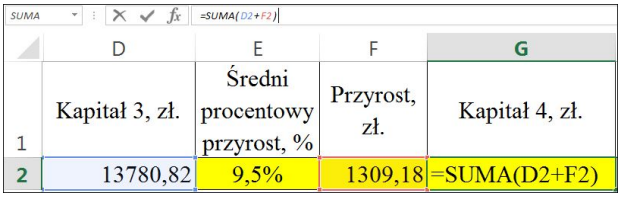
Kolejną kolumnę nazwij „Kapitał 3", a do odpowiedniej komórki (D2) wpisz funkcję „SUMA", następnie w argumencie zaznacz komórki A2 i C2, jak przedstawiono na rysunku 5.14.



Rysunek 5.14: Obliczenie wartości kapitału w MS Excel

Jeśli skopiujesz komórki B2, C2, D2 i wkleisz je do kolejnych komórek tego wiersza (E2, F2 i G2) uzyskasz wartość kapitału czwartego roku (patrz na rysunek 5.15), ponieważ każda wcześniej wprowadzona przez Ciebie funkcja zostanie powtórzona. Jeśli powtórzysz tę operację jeszcze raz, uzyskasz kapitał piątego roku.

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.



Rysunek 5.15: Kopiowanie funkcji w MS Excel

Wracając do pytania o zarządzanie kapitałem i biorąc pod uwagę, że wybraliśmy lokatę w banku z oprocentowaniem składanym i stopą procentową 0,7 jako najbardziej korzystną, możemy policzyć, jak zmieni się posiadany przez Pawła kapitał początkowy przed podjęciem studiów.

Po pierwszym roku Paweł zarobił 10249,96 zł. W celu obliczenia, jak zmieni się ta kwota po 4 latach musimy odpowiednie dane podstawić do wzoru 5.3:

$$K_1 = 10249,96 \times \left(1 + \frac{0,7}{100}\right)^{48} = 14326,39$$

Po drugim roku pracy Paweł zarobi 12585,22 zł.

$$K_2 = 12585,22 \times \left(1 + \frac{0,7}{100}\right)^{36} = 16177,89$$

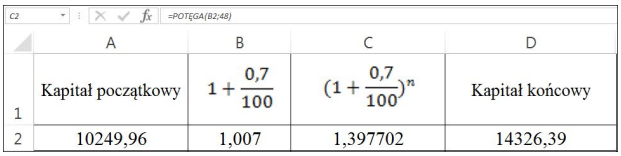
Po trzecim roku pracy Paweł zarobi 13780,82 zł.

$$K_3 = 13780,82 \times \left(1 + \frac{0,7}{100}\right)^{24} = 16292,30$$

Po czwartym roku pracy Paweł zarobi 15089,99 zł.

$$K_4 = 15089,99 \times \left(1 + \frac{0,7}{100}\right)^{12} = 16407,51$$

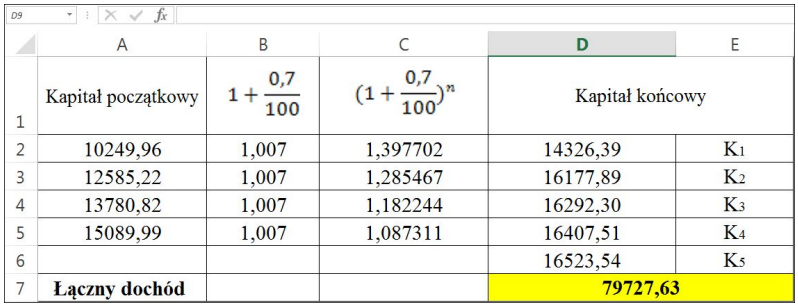
Ponieważ już umiesz korzystać z funkcji „POTĘGA” w MS Excel, łatwo poradzisz sobie z tym obliczeniem. Przypominający przykład obliczenia K_1 widzisz na rysunku 5.16.



Rysunek 5.16: Obliczenie wartości zdyskontowanego kapitału pierwszego roku w MS Excel

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli” współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

Po obliczeniu wartości kapitału dla każdego roku, korzystając z funkcji „SUMA", oblicz łączny dochód Pawła za 5 lat i sprawdź z danymi przedstawionymi na rysunku 5.17.



	A	B	C	D	E
1	Kapitał początkowy	$1+\frac{0,7}{100}$	$(1+\frac{0,7}{100})^n$	Kapitał końcowy	
2	10249,96	1,007	1,397702	14326,39	K_1
3	12585,22	1,007	1,285467	16177,89	K_2
4	13780,82	1,007	1,182244	16292,30	K_3
5	15089,99	1,007	1,087311	16407,51	K_4
6				16523,54	K_5
7	**Łączny dochód**			**79727,63**	

Rysunek 5.17: Obliczenie łącznego dochodu w MS Excel

5.6 Siła nabywcza pieniądza oraz inflacja

Ogólne pojęcie

Aby w swoich planach finansowych nie doprowadzić do zbyt optymistycznego scenariusza na przyszłość, w tym miejscu zapoznamy się z pojęciami, które ściśle wiążą się zarówno z zarabianiem pieniędzy, jak i z ich oszczędzaniem. Są to pojęcia siły nabywczej pieniądza oraz inflacji.

Definicja 5.10 — Siła nabywcza pieniądza. To inaczej rzeczywista wartość pieniądza. Siła nabywcza pieniądza (realna wartość pieniądza) może być również postrzegana jako ilość towarów i usług, jaką można nabyć za określoną jednostkę pieniądza.

Definicja 5.11 — Inflacja. To proces wzrostu przeciętnego poziomu cen w gospodarce. Skutkiem tego procesu jest spadek siły nabywczej pieniądza.

Obliczenie realnej wartości zgromadzonego kapitału

Jak już wiesz, kapitał, który Paweł może zgromadzić w ciągu 5 lat pracy, możemy wycenić jako dość istotny w dniu dzisiejszym. Nie oznacza to jednak, że po 5 latach będzie Paweł mógł nabyć tyle samo dóbr za te same pieniądze.

Obliczmy zatem realną wartość zgromadzonego przez Pawła kapi-

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

tału. Średni poziom inflacji w Polsce - w ostatnich 5 latach - wynosi 3%. Żeby obliczyć wartość uzyskanego w tym czasie dochodu musimy posłużyć się wzorem 5.5:

$$W_{rz_k} = K_t \times \left(1 + \frac{i}{100}\right)^n \tag{5.5}$$

gdzie: W_{rz_k} – wartość rzeczywista kapitału (z uwzględnieniem inflacji); K_t – kapitał t-go roku; i – stopa inflacji (w podanym przykładzie – 3%); n – liczba lat, w ciągu których kapitał jest poddawany procesowi inflacji (w podanym przykładzie – 5 dla K1; 4 dla K2; 3 dla K3; 2 dla K4; 1 dla K5).

$$\begin{aligned}
W_{rz_{k_1}} &= 14326,39 \times \left(1 - \frac{3}{100}\right)^5 = 12302,56 \\
W_{rz_{k_2}} &= 16177,89 \times \left(1 - \frac{3}{100}\right)^4 = 14322,17 \\
W_{rz_{k_3}} &= 16292,30 \times \left(1 - \frac{3}{100}\right)^3 = 14869,54 \\
W_{rz_{k_4}} &= 16407,51 \times \left(1 - \frac{3}{100}\right)^2 = 15437,82 \\
W_{rz_{k_5}} &= 16523,54 \times \left(1 - \frac{3}{100}\right)^1 = 16027,83 \\
K_{kn} &= 12302,56 + 14322,17 + 14869,54 + 15437,82 + \\
&\quad 16027,83 = 72959,92
\end{aligned}$$

Możesz uprościć te obliczenia stosując arkusz kalkulacyjny. Wykorzystaj w tym celu sporządzony arkusz, w którym obliczyłeś kapitał końcowy dla każdego roku. Wpisz w kolejnej kolumnie wartość uzyskaną w nawiasie. W następnej kolumnie podnieś tę wartość do odpowiedniej potęgi, a w kolumnie z nazwą „Kapitał końcowy", używając funkcji „ILOCZYN", wprowadź obliczenia według danych z rysunku 5.18.

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

E7 | fx | =SUMA(E2:E6)

	B	C	D	E
1	Kapitał zgromadzony, zl.	$1-\frac{3}{100}$	$\left(1-\frac{3}{100}\right)^n$	Rzeczywista wartość kapitału, zł.
2	14326,39	0,97	0,858734	12302,56
3	16177,89	0,97	0,885293	14322,17
4	16292,30	0,97	0,912673	14869,54
5	16407,51	0,97	0,940900	15437,82
6	16523,54	0,97	0,970000	16027,83
7	**79727,62**			**72959,92**

Rysunek 5.18: Obliczenie kapitału końcowego w MS Excel

Korzystając z naszych obliczeń dochodzimy do wniosku, że Paweł, dbając o przyszłość w okresie od ukończenia szkoły do podjęcia studiów, może zgromadzić kapitał w wysokości 79727,62 zł, a rzeczywista wartość tego kapitału w roku podjęcia studiów wyniesie 72959,92 zł.

5.7 Ćwiczenia

Dla przećwiczenia omówionych w rozdziale zagadnień spróbuj teraz samodzielnie rozwiązać poniższe zadanie.

Ćwiczenie 5.1 Zuzanna jest uczennicą szkoły średniej, ma 15 lat i w roku bieżącym ukończy 8 klasę. Kolejnym etapem jej edukacji jest liceum. Poniżej widzisz tablicę 5.3, która przestawia minimalne stawki godzinowe w latach 2018-2022.

Obowiązywała od	**Minimalna stawka godzinowa**
01.01.2022	20,00
01.01.2021	18,00
01.01.2020	17,00
01.01.2019	15,00
01.01.2018	14,00

Tablica 5.3: Minimalna stawka godzinowa 2018-2022

Zuzanna może złożyć kapitał w banku, na warunkach oprocentowania składanego ze stopą procentową 0,6. Załóżmy, że średni

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

poziom inflacji wynosi 2%. Pozostałe warunki pozostają bez zmian. Oblicz, jaki łączny kapitał może zgromadzić Zuzanna i jaka będzie jego wartość rzeczywista przed podjęciem studiów.

■

Norway grants

Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).

Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

Odpowiedzi do zadania

Rok I.

Miesięczne wynagrodzenie brutto Zuzanny w okresie wakacyjnym pierwszego roku – 2520,00 zł. Miesięczne wynagrodzenie netto Zuzanny w okresie wakacyjnym pierwszego roku – 1978,80 zł. W okresie wakacyjnym będzie mogła zarobić 3957,60 zł. Po dziesięciu miesiącach lokaty w banku Zuzanna dostanie 4201,57 zł. Wynagrodzenie netto Zuzanny w okresie roku szkolnego to 6596,00 zł.

Łączny dochód pierwszego roku wyniesie 10797,57 zł.

Rok II.

Obowiązywała od	Minimalna stawka godzinowa	Przyrost w wymiarze absolutnym, zł	Przyrost w wymiarze procentowym, %
01.01.2022	20,00	2,0	11,11
01.01.2021	18,00	1,0	5,88
01.01.2020	17,00	2,0	13,33
01.01.2019	15,00	1,0	6,67
01.01.2018	14,00	-	-
Średnie wartości	-	1,50	9,25

Tablica 5.4: Minimalna stawka godzinowa 2018-2022 i średnie wartości jej przyrostu

Minimalna stawka godzinowa w drugim roku – 21,50 zł. Miesięczne wynagrodzenie brutto Zuzanny w okresie wakacyjnym drugiego roku – 3612,00 zł. Miesięczne wynagrodzenie netto Zuzanny w okresie wakacyjnym drugiego roku – 2836,28 zł. W okresie wakacyjnym będzie mogła zarobić 5672,56 zł. Wynagrodzenie netto Zuzanny w okresie roku szkolnego 7090,70 zł.

Łączny dochód drugiego roku wyniesie 12763,26 zł.

Rok III.

Łączny dochód wyniesie 13943,99 zł.

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

Rok IV.

Łączny dochód wyniesie 15233,81 zł.

Wartość kapitału po trzech latach lokat bankowych

Rok I - 13392,24 zł,
Rok II - 14733,75 zł,
Rok III - 14981,76 zł.

Łączny dochód czterech lat wyniesie 58341,56 zł, natomiast po uwzględnieniu inflacji będzie to 55537,48 zł.

Norway grants

Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).

Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

6. Sztuczna inteligencja

Leszek Klich

6.1 Wstęp

Sztuczna inteligencja to termin, który coraz częściej pojawia się w kontekście nowoczesnego przemysłu, fabryk oraz wysokich technologii. W praktyce, sztuczną inteligencję - a dokładniej - uczenie maszynowe znajdziemy w urządzeniach powszechnego użytku! Tyle tylko, że większość użytkowników nie zdaje sobie z tego sprawy.

Dla przykładu - wszyscy korzystamy ze smartfonów, tabletów czy komputerów osobistych, które wykorzystujemy w coraz szerszym zakresie. Kiedyś telefony posiadały wyłącznie funkcje rozmowy i pisania krótkich wiadomości SMS. Obecne telefony wyposażone są w wydajne procesory, ogromną pamięć oraz duże i czytelne ekrany. Dzisiejsze smartfony to bardzo wydajne komputery, zamknięte w niewielkiej obudowie. To radykalnie rozszerzyło ich możliwości. Popularne stały się komunikatory, aplikacje sieci społecznościowych, streaming filmów, gry czy inne aplikacje mobilne. Nieodłącznym elementem współczesnego smartfona jest wbudowany aparat fotograficzny, który potrafi zapisywać wysokiej jakości zdjęcia i filmy. Jakość wbudowanego aparatu stanowi, dla niektórych, decydującą zachętę do wyboru konkretnego modelu.

Ale co ma aparat do sztucznej inteligencji? W połączeniu z oprogramowaniem wyposażonym w specjalne algorytmy można retuszować

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

zdjęcia, nakładać filtry zmieniające nasz wygląd, rozpoznawać osoby, zmieniać tło czy identyfikować przedmioty na zdjęciu.

W niniejszym rozdziale pokażę, jak napisać bardzo prosty program w języku Python, który będzie potrafił identyfikować twarze na zdjęciach.

6.2 Co to jest sztuczna inteligencja?

Sztuczna inteligencja to w uproszczeniu algorytmy, które umożliwiają systemom technicznym rozwiązywanie zadań, w których mamy do czynienia z bardzo dużą ilością danych, a dodatkowo dane te są na tyle złożone, że człowiek nie jest w stanie ich poprawnie zinterpretować i wyciągnąć właściwe wnioski.

Każdy komputer odbiera dane z pewnych czujników (np. kamera, mikrofon), przetwarza je i odpowiednio reaguje. Analizując dane pochodzące z kamery, komputer jest w stanie do pewnego stopnia dostosować swoje zachowanie, poprzez analizę skutków wcześniejszych działań i działając autonomicznie.

Definicja 6.1 — Sztuczna inteligencja (ang. artificial intelligence, AI). To możliwość samouczenia się maszyn na podstawie doświadczeń, dostosowywanie się do nowo pobranych danych i wykonywanie zadań podobnych do ludzkich. Nowoczesne algorytmy uczenia maszynowego umożliwiają szkolenie, które pozwala na wykonywanie konkretnych zadań poprzez przetwarzanie olbrzymich ilości danych i identyfikację wzorców w tych danych.

Nauka o sztucznej inteligencji jest postrzegana jako centralny element cyfrowej transformacji społeczeństwa i stała się priorytetem w Unii Europejskiej. Z tego powodu kładzie się szczególny nacisk na kierunki rozwoju tej dziedziny nauki, bowiem przyszłe zastosowania mogą przynieść ogromne zmiany i przyczynić się do szybkiego rozwoju wielu obszarów naszego życia.

6.3 Język Python

Python to darmowy język programowania charakteryzujący się czytelną składnią i łatwością nauki. Jest też na tyle uniwersalny, że przy jego pomocy można tworzyć aplikacje o wielu zastosowaniach. Kolejną istotną cechą nie języka, ale społeczności jest olbrzymia ilość bezpłatnych bibliotek. Dzięki temu wiele zadań, które chcemy wykonać, jest dostępnych w postaci gotowych paczek.

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

Warto także wspomnieć, że kod, który musimy napisać, by uzyskać gotowy efekt, jest czasami wielokrotnie krótszy w porównaniu z innymi językami. W obszarach sztucznej inteligencji to właśnie Python jest najbardziej popularny, ponieważ posiada wiele zalet w tym obszarze. Kilka z nich wymieniłem poniżej:

- posiada bardzo dobrą dokumentację;
- dzięki popularności łatwo uzyskać pomoc od innych i dzielić się doświadczeniami;
- działa w systemie Windows, Mac OS oraz Linux;
- jest darmowy;
- jest bardzo prosty w nauce;
- uniwersalność sprawia, że może być używany do wielu typów aplikacji, takich jak aplikacje naukowe, matematyczne, internetowe itp.;
- dostępnych jest wiele bibliotek, które programista może wykorzystać we własnych aplikacjach.

Jak zainstalować język Python?

Aby zainstalować język Python w systemie Windows skorzystaj z Instrukcji instalacji oprogramowania Python, która została szczegółowo opisana w załączniku A.

Środowisko programistyczne

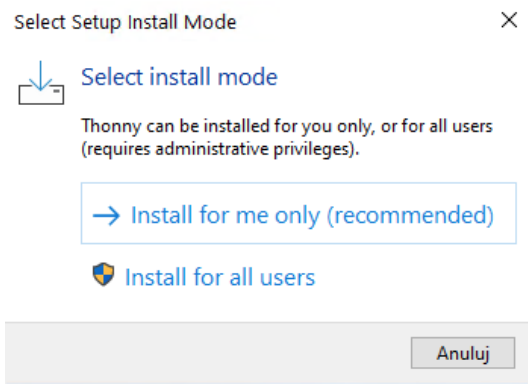
Choć do programowania w języku Python wystarczy dostępny w systemie Notatnik i wiersz polecenia, w praktyce nie jest to jednak efektywne.

Aby wygodnie programować, należy pobrać i zainstalować środowisko programistyczne, które znacznie ułatwi programowanie. W skład środowiska programistycznego (IDE - Integrated Development Enviroment) wchodzi między innymi zaawansowany edytor kodu, który ułatwi programowanie oraz pozwoli jednym przyciskiem uruchamiać napisany program. Dla języka Python istnieje wiele darmowych oraz płatnych środowisk programistycznych, ale wybrałem proste, lecz bardzo funkcjonalne środowisko o nazwie Thonny.

Bezpośrednio po uruchomieniu instalatora, program instalacyjny zapyta o wybór trybu instalacji. W tym miejscu można wybrać proponowany tryb, czyli **Install for me only (recommended)**, co ilustruje obrazek 6.1.

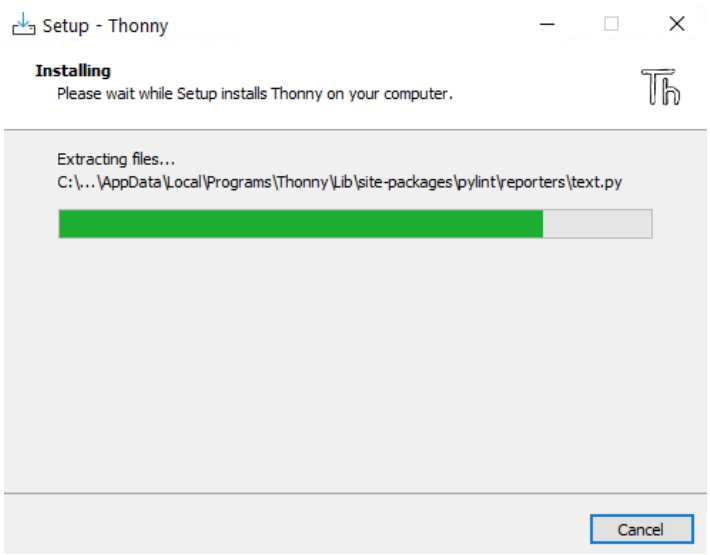
Instalator środowiska Thonny jest intuicyjny, zaś proces instalacji sprowadza się do zaakceptowania warunków licencji i klikania przycisku **Next**. Nie wymaga zatem wyjaśnień. Warto jedynie zaznaczyć -

Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Norway grants
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.



Rysunek 6.1: Instalacja Thonny - wybór instalacji

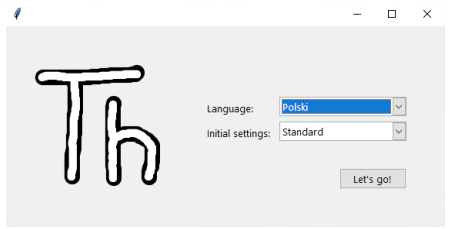
w jednym z etapów instalacji - pole wyboru utworzenia skrótu na pulpicie.



Rysunek 6.2: Proces instalacji Thonny

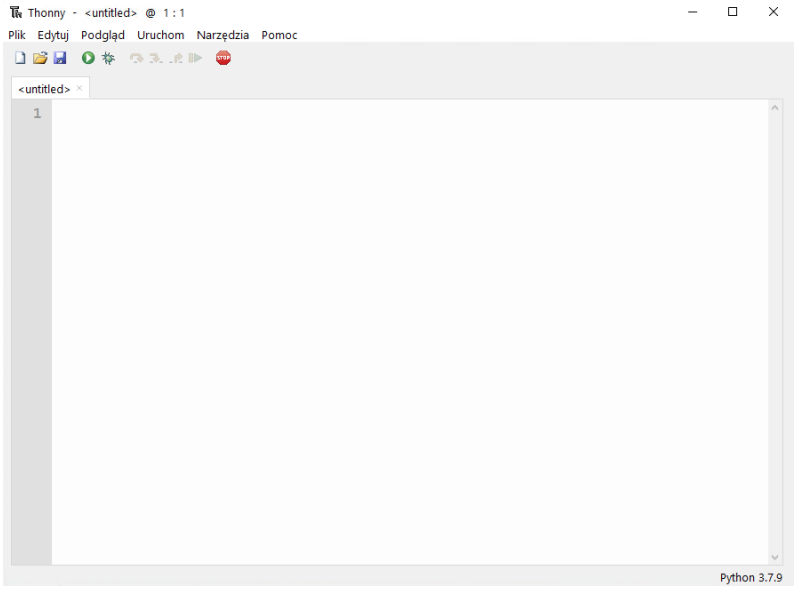
Po zainstalowaniu programu, podczas pierwszego uruchomienia, wyświetli się okno wyboru języka. Warto wybrać z menu język polski i kliknąć przycisk **Let's go!**

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.



Rysunek 6.3: Pierwsze uruchomienie Thonny - ustawienie języka

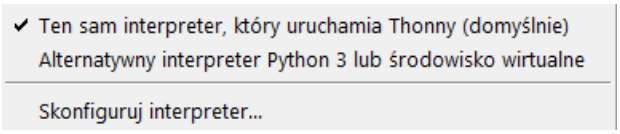
Na rysunku 6.4 widać uruchomione środowisko programistyczne gotowe do pracy. Jeśli przyjrzymy się bliżej (prawy, dolny róg okna), zauważymy wersję języka Python, który jest domyślnie używany. Dzieje się tak, ponieważ Thonny posiada własny interpreter języka Python, jednakże nie jest to najnowsza wersja. Warto jednak trzymać się zasady, by w miarę możliwości używać najnowszej jego wersji.



Rysunek 6.4: Środowisko Thonny gotowe do pracy

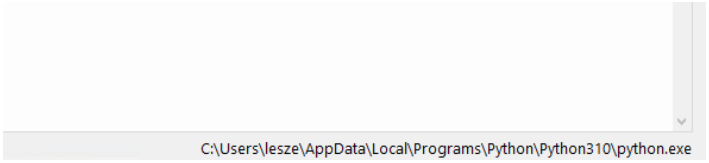
W poprzednim podrozdziale zainstalowaliśmy najnowszą wersję języka Python. Zatem, aby ją wykorzystać wystarczy przełączyć środowisko na nowszą wersję. W tym celu należy kliknąć w prawym dolnym obszarze okna - tam, gdzie znajduje się napis **Python 3.7.9**. Otworzy się dodatkowe menu (rysunek 6.5), z którego należy wybrać opcję **Alternatywny interpreter Python 3 lub środowisko wirtualne**.

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.



Rysunek 6.5: Zmiana wersji języka Python

Po wykonaniu tej czynności możemy być pewni, że pracujemy z najnowszą wersją języka Python (6.6) i nasze środowisko jest w pełni gotowe do programowania.

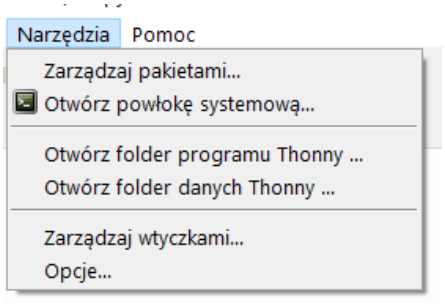


Rysunek 6.6: Poprawna wersja języka Python

6.4 Instalacja niezbędnych bibliotek

W naszych programach będziemy korzystać z biblioteki OpenCV (Open Source Computer Vision Library). Jest to biblioteka zawierająca zbiory procesów i algorytmów wykorzystywanych przy przetwarzaniu obrazów. Charakteryzuje się ona dużą wydajnością oraz prostotą wykorzystania. Biblioteka ta jest wieloplatformowa, co oznacza, że można z niej korzystać w dowolnym systemie operacyjnym.

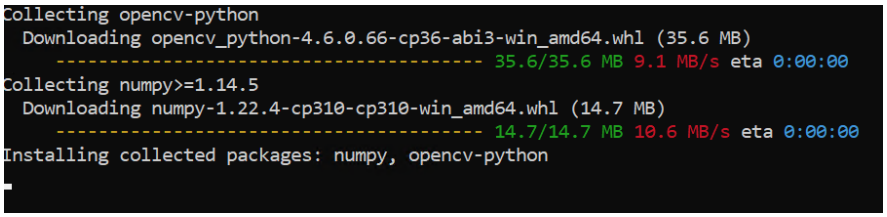
Aby zainstalować bibliotekę w systemie, należy uruchomić środowisko Thonny i z menu **Narzędzia** wybrać polecenie **Otwórz powłokę systemową**, co widać na rysunku 8.1.



Rysunek 6.7: Uruchamianie powłoki systemowej w środowisku Thonny.

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

Następnie w oknie powłoki systemowej należy zainstalować bibliotekę OpenCV poleceniem: **pip install opencv-python** <Enter>. Nastąpi proces pobierania i instalacji, który może potrwać w zależności od prędkości łącza internetowego (rysunek 6.8).



Rysunek 6.8: Instalacja bibliotek OpenCV.

Zainstalujemy także bibliotekę o nazwie Matplotlib, która jest przydatną biblioteką do wizualizacji danych. Aby zainstalować bibliotekę, w oknie powłoki systemowej należy wydać polecenie: **pip install matplotlib** <Enter>.

Podczas każdej instalacji instalowane są tzw. zależności, czyli inne biblioteki, które są niezbędne do działania OpenCV. Przykładem zależności jest w tym wypadku biblioteka Numpy, która implementuje szybkie tablice dla języka Python, ponieważ język ten w standardzie ich nie posiada. Na szczęście narzędzie do instalacji bibliotek o nazwie **pip** (Package Installer for Python) potrafi automatycznie instalować wszystkie zależności. Gdy instalacja zakończy się powodzeniem, proces instalacji środowiska i bibliotek jest zakończony.

6.5 Wykorzystanie biblioteki OpenCV

Każdy obraz zapisany w pamięci, który jest zgodny z OpenCV to wielka macierz, w której każdy piksel widoczny w obrazie reprezentowany jest trzema składowymi kolorów R-red (czerwony), G-green (zielony), B-blue (niebieski). Domyślnie format składowych koloru obrazu (channels) jest przechowywany w odwrotnej kolejności (BGR), co warto zapamiętać podczas pracy z biblioteką. Przyglądając się własności macierzy można zauważyć, że jej format to (H,W,C) [H-height, wysokość; W-width, szerokość; C-channels, kanały]. Każda składowa koloru (R,G,B) przyjmuje wartości w przedziale [0,255] i jest reprezentowana 8 bitową zmienną całkowitą.

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

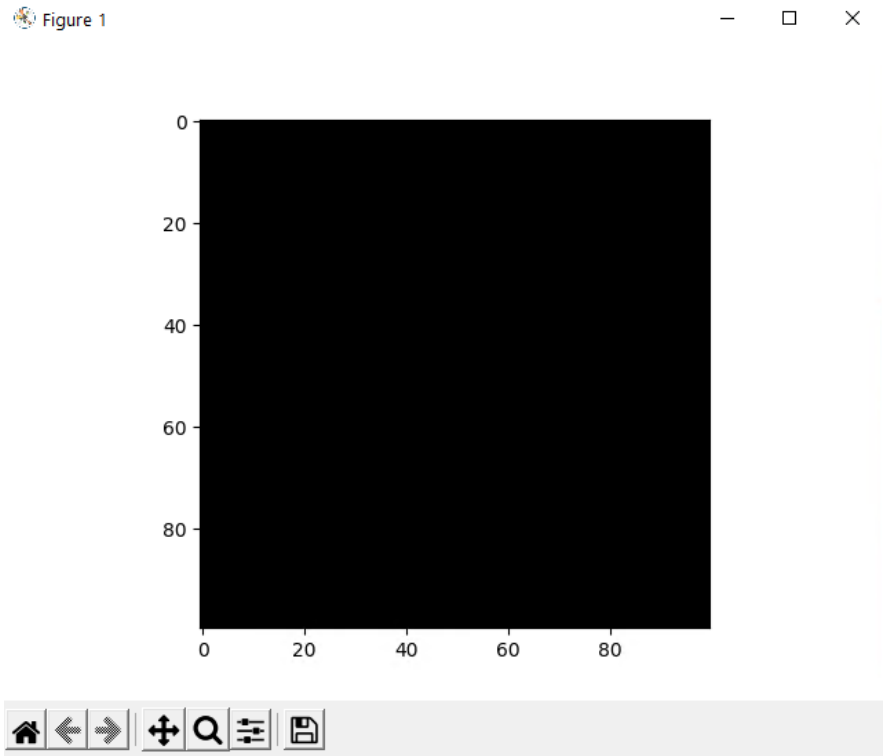
Praca z obrazkami

Obraz jest macierzą, zatem można ją wygenerować przy pomocy biblioteki Numpy przy wykorzystaniu funkcji **zeros**. Poniższy kod tworzy macierz o wysokości 100 i szerokości 100 punktów i wypełnia ją zerami.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

img = np.zeros((100,100,3), dtype='uint8')

plt.imshow(img)
plt.show()
```

Listing 6.1: Tworzenie pustego obrazu

Powyższy kod wykorzystuje także bibliotekę Matplotlib do wyświetlenia utworzonej macierzy, która jest w rzeczywistości obrazkiem. Wyniku działania programu jest wyświetlenie czarnego prostokąta (100×100), co zostało zaprezentowane na rysunku 6.9.



Rysunek 6.9: Wynik działania programu

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

Teraz zajmiemy się otwarciem obrazu z dysku przy pomocy wbudowanej w bibliotekę funkcji **imread**. Jednakże najpierw przyjrzyjmy się rysunkowi 6.10. Obraz ten będzie stanowić wzorzec dla kolejnej operacji.

Rysunek 6.10: Obraz wzorcowy

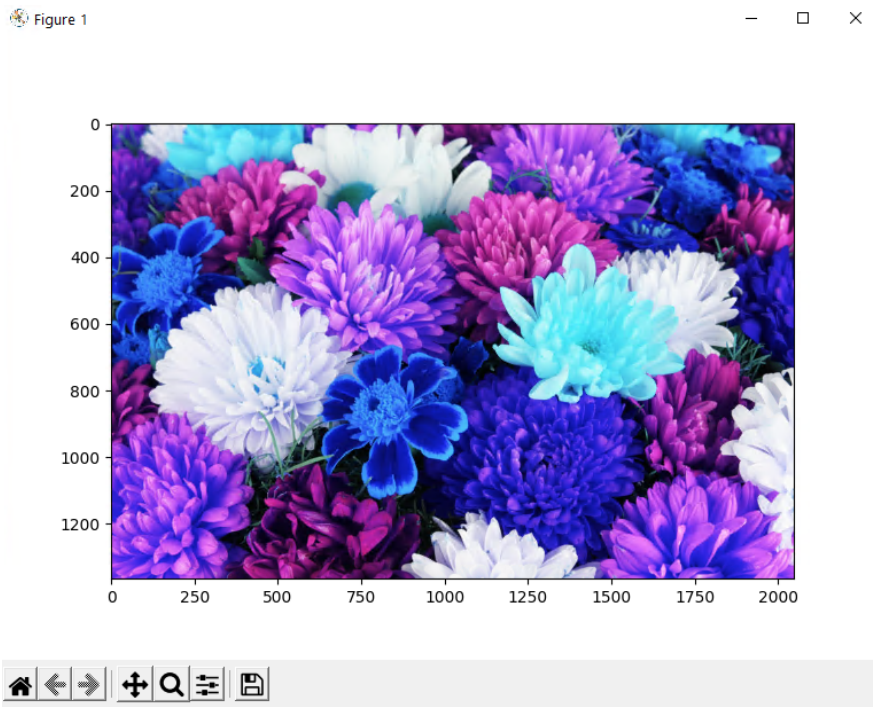
Poniższy kod odczytuje plik wzorcowy przy pomocy funkcji **imread**, a następnie wyświetla go przy pomocy biblioteki Matplotlib.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

img = cv2.imread('flower01.jpeg')

plt.imshow(img)
plt.show()
```

Listing 6.2: Otwarcie obrazka z pliku

Wynik działania przykładu jest widoczny na rysunku 6.11. Jak widać, dalece odbiega on od obrazu wzorcowego, widocznego na rysunku 6.10. Wynika to właśnie z niekompatybilności kolejności kanałów, stąd należy je odwrócić.

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.



Rysunek 6.11: Obraz wzorcowy odczytany przy użyciu OpenCV

Odwrócenie kolejności kanałów można przeprowadzić na dwa sposoby. Pierwszym z nich jest odwrócenie kolejności w macierzy na ostatniej osi (osi kanałów) img = img[...,::-1], zaś drugim sposobem jest wykorzystanie wbudowanej funkcji konwertującej w OpenCV: cvtColor(obraz, cv2.COLOR_BGR2RGB). Rozbudowany kod programu wygląda teraz następująco:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

img = cv2.imread('flower01.jpeg')

# pierwszy sposób
# img = img[...,::-1]

# drugi sposób
img = cv2.cvtColor(img, cv2.COLOR_BGR2RGB)

plt.imshow(img)
plt.show()
```

Listing 6.3: Otwarcie i konwersja obrazu

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

Tym razem obraz został poprawnie wyświetlony, co widać na rysunku 6.12.

Rysunek 6.12: Obraz skonwertowany prawidłowo

Wykrywanie krawędzi

Kontury to linie łączące wszystkie punkty wzdłuż granicy obrazu, które mają tę samą intensywność. Wykrywanie konturów przydaje się przy analizie kształtów, identyfikacji rozmiaru obiektów na obrazku czy wykrywania obiektów. Bibliotek OpenCV oferuje wiele funkcji wyodrębniania konturów. Popularnym algorytmem wykrywania krawędzi jest Canny, który został opracowany przez Johna F. Canny'ego. Jest to złożony algorytm wieloetapowy, lecz biblioteka OpenCV umożliwia bardzo jego bardzo proste wykorzystanie.

```
import cv2 as cv
from matplotlib import pyplot as plt

img = cv.imread('flower01.jpeg', 0)

edges = cv.Canny(img, 100, 200)

plt.subplot(121), plt.imshow(img, cmap = 'gray')
```

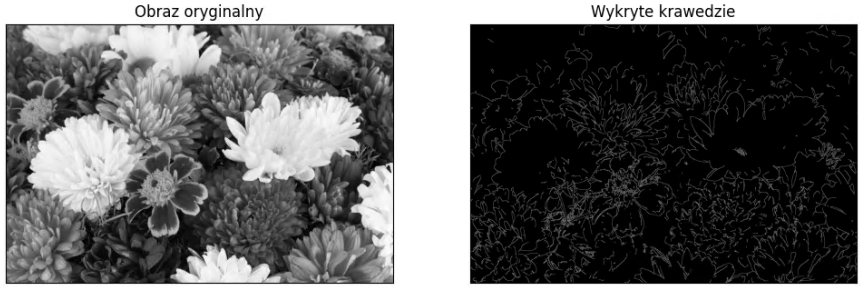
Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

```
plt.title('Obraz oryginalny'), plt.xticks([]), plt.yticks([])
plt.subplot(122),plt.imshow(edges, cmap = 'gray')
plt.title('Wykryte krawędzie'), plt.xticks([]), plt.yticks
    ([])
plt.show()
```

Listing 6.4: Wykrywanie konturów

Program (z listingu powyżej) odczytuje obrazek przy pomocy funkcji imread. Warto zauważyć, że drugim argumentem funkcji jest tzw. flaga, która w tym przypadku jest ustawiona na wartość 0. Alternatywnie można także podać flagę cv2.IMREAD_GRAYSCALE. Flaga w tym wypadku oznacza, że odczytany obrazek od razu zostanie skonwertowany do skali szarości. Po przetworzeniu obrazu program wyświetli w jednym oknie obok siebie dwa obrazki - dzięki wykorzystaniu metody subplot(). Dodatkowo przy pomocy title wyświetlane są tytuły dla każdego obrazka z osobna.

Algorytm wykrywania konturów OpenCV, przedstawiony na powyższym przykładzie, realizuje jedna funkcja Canny(). Jako argumenty przyjmuje ona obraz wejściowy, zaś drugim i trzecim argumentem są odpowiednio wartość minimalna i maksymalna, czyli argumenty progowe. Wszelkie krawędzie z gradientem intensywności większym niż wartość maksymalna będą krawędziami, zaś te poniżej wartości minimalnej nie będą krawędziami, zatem algorytm je odrzuci. Efekt działania programu ilustruje rysunek 6.13.



Rysunek 6.13: Wykrywanie krawędzi

Odpowiednio, eksperymentując z argumentami funkcji Canny(), można dopasować dokładność wykrywania krawędzi w zależności od analizowanego obrazu i jego zawartości, doświetlenia oraz treści.

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

Detekcja twarzy

W tym podrozdziale zostanie zaprezentowana prosta metoda do detekcji twarzy na obrazku. Wykrywanie twarzy jest procesem skomplikowanym i wymagającym dużej mocy obliczeniowej. Na szczęście biblioteka OpenCV posiada wbudowane algorytmy uczenia maszynowego, które umożliwiają ich bardzo proste użycie. W konsekwencji napisanie programu rozpoznającego twarz, wymaga jedynie umiejętności ich użycia w praktyce.

Do rozpoznawania twarzy wykorzystany zostanie algorytm uczenia maszynowego - tzw. klasyfikator Haara. Jest to, oparta na funkcjach Haar, metoda wykrywania obiektów. Została ona zaproponowana przez Paula Violę i Michaela Jonesa w artykule „Rapid Object Detection using a Boosted Cascade of Simple Features" w 2001 roku. W dużym uproszczeniu jej działanie jest oparte na funkcji kaskadowej, która musi zostać wytrenowana przy pomocy wielu pozytywnych (zawierających twarze) i negatywnych (nie zawierających twarzy) obrazów. Dodatkowo należy wydobyć z nich pewne cechy. Proces trenowania nie jest łatwy dla początkującego programisty, dlatego biblioteka OpenCV zawiera wiele gotowych do wykorzystania klasyfikatorów. Można je pobrać z witryny https://github.com/opencv/ opencv/tree/master/data/haarcascades.

Jak widać, na liście plików znaleźć można wiele klasyfikatorów, zaś ich przeznaczenie jest ściśle określone. Do detekcji twarzy wykorzystamy klasyfikator o nazwie haarcascade_frontalface _default.xml. Będzie także potrzebne dowolne zdjęcie zawierające twarz. Przykładowe zdjęcie znajduje się na rysunku 6.14.

Rysunek 6.14: Obrazek przedstawiający przykładowe twarze

Program realizujący rozpoznawanie twarzy znajduje się na listingu poniżej. Po wczytaniu klasyfikatora za pomocą funkcji CascadeClas-

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

sifier, rozpoznanie następuje przy pomocy funkcji detectMultiScale, która przyjmuje kilka argumentów, z których pierwszym jest obrazek. W tym ćwiczeniu nie będą omówione dodatkowe argumenty, ponieważ ich omówienie musi zostać poprzedzone teorią dotyczącą klasyfikatorów Haar. Jeśli zostanie wykryta przynajmniej jedna twarz, funkcja zwróci ich pozycje jako Rect(x,y,w,h). Dzięki temu można wykorzystać je w funkcji **rectangle** do narysowania ramki wokół zidentyfikowanego obszaru obrazka.

```
import cv2

# Załadowanie klasyfikatora
face_cascade = cv2.CascadeClassifier('
    haarcascade_frontalface_default.xml')

# Odczyt obrazka z pliku
img = cv2.imread('faces.jpg')

# Konwersja do skali szarości
gray = cv2.cvtColor(img, cv2.COLOR_BGR2GRAY)

# Detekcja twarzy
faces = face_cascade.detectMultiScale(gray, 1.1, 4)

# Rysowanie obwódki wokół rozpoznanej twarzy
for (x, y, w, h) in faces:
    cv2.rectangle(img, (x, y), (x+w, y+h), (255, 0, 0), 2)
    # Wyświetlenie obrazka
    cv2.imshow('img', img)

    # Oczekiwanie na wciśnięcie dowolnego klawisza
    cv2.waitKey()

# Usunięcie wszystkich okien z pamięci
cv2.destroyAllWindows()
```

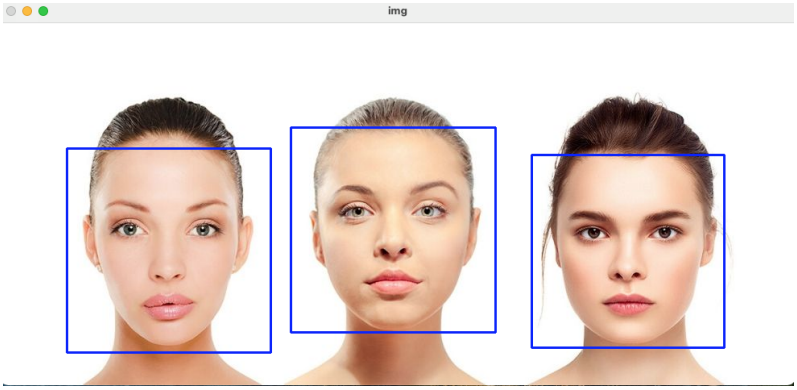
Listing 6.5: Detekcja twarzy

Jak widać na rysunku 6.15, program nakreślił ramki wokół zidentyfikowanych twarzy. Algorytm potrafi zidentyfikować wiele twarzy na obrazku.

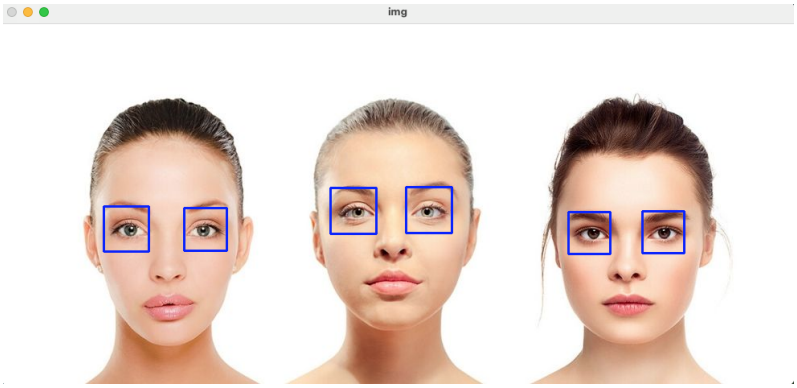
Jeśli zajdzie potrzeba identyfikacji wyłącznie oczu, można wykorzystać inny klasyfikator, np. o nazwie haarcascade_eye.xml. Należy zatem zmienić linię programu odpowiadającą za wczytanie klasyfikatora: face_cascade = cv2.CascadeClassifier('haarcascade_eye.xml') i ponownie uruchomić program. Może się okazać, że oprócz oczu, algorytm błędnie rozpozna dodatkowe obiekty, takie jak usta czy nozdrza. Wówczas należy zmodyfikować parametr detectMultiScale(gray, 1.1, **7**) i ponownie uruchomić program.

Jak widać na rysunku 6.16, detekcja oczu przebiegła prawidłowo. Warto podkreślić, że dysponując komputerem o odpowiednio wydajnym

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.



Rysunek 6.15: Obrazek przedstawiający rozpoznane twarze



Rysunek 6.16: Obrazek przedstawiający rozpoznane oczy

procesorze, w pojedynczym programie można użyć kilka klasyfikatorów. Dla przykładu można jednocześnie poszukiwać na obrazkach zarówno twarzy, jak i oczu czy innych części ciała.

6.6 Podsumowanie

Celem rozdziału było zapoznanie czytelnika z podstawowymi funkcjami biblioteki OpenCV do tworzenia systemów wizyjnych. Choć omówiono wyłącznie kilka algorytmów dostępnych w bibliotece, a zaprezentowane przykłady są krótkie i łatwe w zrozumieniu, wyniki ich działania można uznać jako imponujące. Warto zapoznać się bliżej z biblioteką i poznać inne algorytmy do różnych zastosowań (np. identyfikowania obiektów, klasyfikowania ludzkich działań, śledzenia ruchów kamery, śledzenia poruszających się obiektów itp.). Biblioteka OpenCV znajduje zastoso-

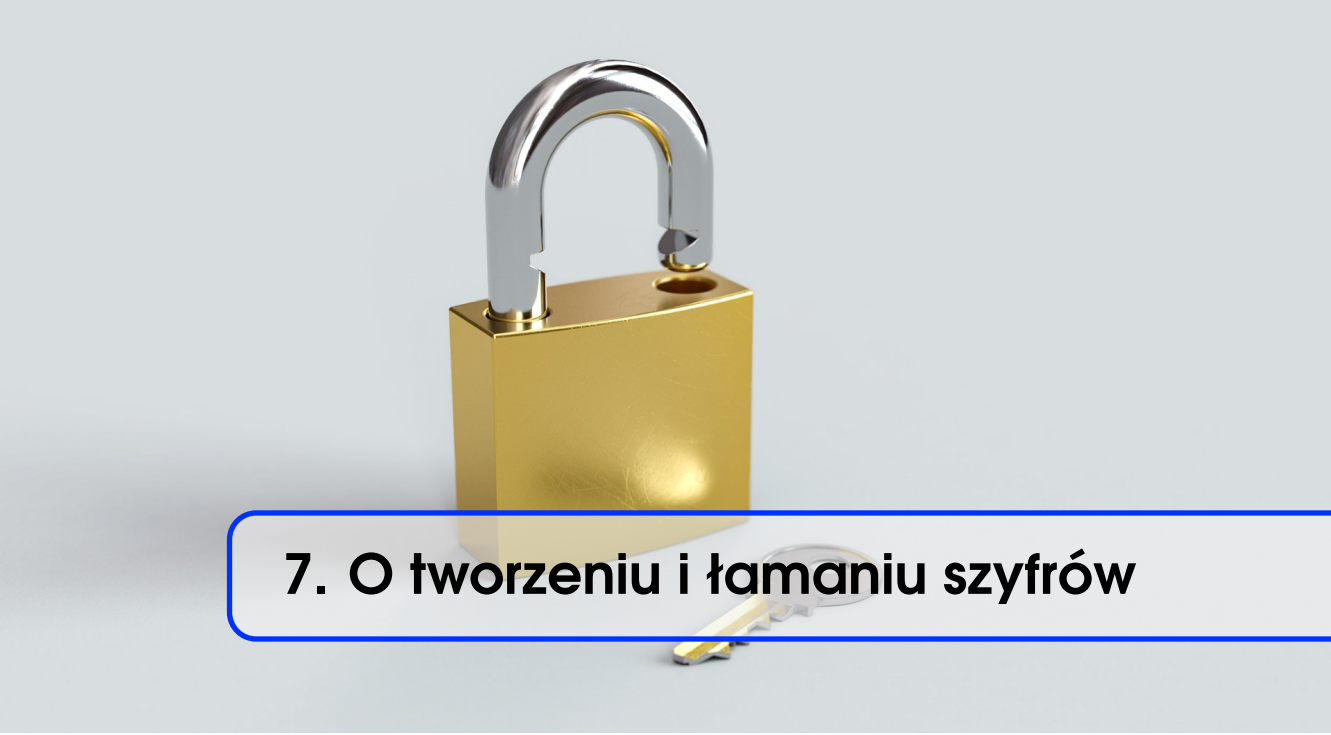
Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

wanie w wielu urządzeniach i jest używana przez firmy, grupy badawcze, ale także przez organy rządowe.

Norway grants

Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).

Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.



7. O tworzeniu i łamaniu szyfrów

Andrzej Chmielowiec

7.1 Wstęp

Nauka, która zajmuje się tworzeniem i łamaniem szyfrów nazywana jest kryptologią. Składają się na nią dwie podstawowe dziedziny: kryptografia (nauka o tworzeniu szyfrów) i kryptoanaliza (nauka o łamaniu szyfrów). Przez lata rozwoju techniki, zabezpieczania wiadomości ewoluowały i były doskonalone. Jednak dopiero pojawienie się komputerów spowodowało ogromny przełom w tej dziedzinie. Wtedy też okazało się, że rozwijane przez lata, takie działy matematyki jak teoria liczb i algebra abstrakcyjna, mają swoje praktyczne zastosowanie.

Nasze rozważania zacznijmy od przykładu mającego już ponad 2000 lat – *szyfru Cezara*. Zasada jego działania jest z dzisiejszej perspektywy banalnie prosta. Kolejne litery alfabetu łacińskiego $A, B, \ldots, X, Y, Z$ zastępowane są literami odległymi od nich o 3 pozycje, co daje odpowiednio litery $D, E, \ldots, A, B, C$. Nietrudno również wyobrazić sobie proces deszyfrowania, podczas którego następuje odwrotna zamiana. Można zatem powiedzieć, że z matematycznego punktu widzenia szyfrowanie i deszyfrowanie są pewnymi funkcjami, z których druga jest odwrotnością pierwszej. Formalnie dla szyfru Cezara możemy to zapi-

Norway grants

Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).

Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

sać na przykład w następujący sposób:

$$f : \begin{cases} A \mapsto D \\ B \mapsto E \\ C \mapsto F \\ \vdots \\ X \mapsto A \\ Y \mapsto B \\ Z \mapsto C \end{cases} \qquad f^{-1} : \begin{cases} A \mapsto X \\ B \mapsto Y \\ C \mapsto Z \\ \vdots \\ X \mapsto U \\ Y \mapsto V \\ Z \mapsto W \end{cases}$$

Jeśli pójdziemy nieco dalej i zakodujemy każdą literę alfabetu łacińskiego kolejnymi nieujemnymi liczbami całkowitymi ($A \mapsto 0$, $B \mapsto 1$, $\ldots$, $Z \mapsto 25$), to szyfr Cezara przyjmie jeszcze bardziej skondensowaną postać. Mianowicie obie funkcje będziemy mogli zapisać jako

$$\begin{aligned} f(x) &= x + 3 \bmod 26, \\ f^{-1}(y) &= y - 3 \bmod 26. \end{aligned}$$

Przy czym mod26 jest operacją wzięcia reszty z dzielenia przez 26. Zauważmy, że przesunięcie o 3 może być zastąpione przesunięciem o dowolną liczbę pozycji. Wtedy szyfr Cezara uogólnia się do postaci

$$\begin{aligned} f(x,k) &= x + k \bmod 26, \\ f^{-1}(y,k) &= y - k \bmod 26, \end{aligned}$$

gdzie liczbę k nazywamy kluczem. Nietrudno zauważyć, że możliwych kluczy jest 26, przy czym klucz $k = 0$ daje funkcję identycznościową i nie zmienia tekstu jawnego. Klucz taki określamy mianem słabego klucza, gdyż nie pozwala on utajnić wiadomości. Jak do tej pory opisaliśmy konstrukcję szyfru Cezara i jego uogólnienie. Działaliśmy więc w obrębie kryptografii. Teraz spojrzymy na ten szyfr od strony kryptoanalizy, czyli nauki o łamaniu szyfrów. W tym przypadku najprostszą metodą jest tak zwany atak brutalny – to znaczy przeszukanie wszystkich możliwych kluczy kryptograficznych. Atak ten jest możliwy ponieważ liczba wszystkich kluczy jest bardzo mała i wynosi zaledwie 26. Istnieje jednak bardzo prosta modyfikacja szyfru Cezara, która wydatnie zwiększa liczbę możliwych kluczy. Mianowicie jako funkcję f wybieramy dowolną permutację zbioru liter $\{A, B, \ldots, Z\}$. Takich możliwości mamy już $26! \simeq 2^{88}$, co oznacza, że liczba możliwych kluczy jest gigantyczna. Nowoczesny procesor nie byłby w stanie ich przeanalizować nawet gdyby pracował od początku istnienia wszechświata.

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

Tutaj jednak z pomocą przychodzi nam statystyka. Okazuje się bowiem, że w każdym języku częstotliwość występowania poszczególnych liter jest różna. Dzięki temu, przy odpowiedniej liczbie tekstów zaszyfrowanych, możliwe jest znaczne ograniczenie możliwych kluczy. Ten rodzaj kryptoanalizy stosowany był już w średniowieczu. Sprawdzano najpierw, jakie litery pojawiają się w szyfrogramie najczęściej i w to miejsce wstawiano litery najczęściej występujące w danym języku. Na ogół po kilku lub kilkunastu próbach prowadziło to odczytania całej wiadomości i poznaniu przekształcenia szyfrującego.

Szyfry bazujące na koncepcji szyfru Cezara dominowały przez bardzo długi czas. Rewolucję w podejściu do projektowania i łamania szyfrów przyniosła dopiero II Wojna Światowa i niemiecka maszyna szyfrująca Enigma. Była to pierwsza tak zaawansowana koncepcyjnie maszyna szyfrująca. Jej złamanie stało się motorem rozwoju zupełnie nowych metod kryptoanalizy. Ogromny udział mieli w tym polscy matematycy: Marian Rejewski, Henryk Zygalski i Jerzy Różycki. Zastosowali oni teorię permutacji i pewne własności maszyny do ograniczenia przestrzeni przeszukiwanych kluczy. Kolejnego przełomu dokonał Alan Turing, który stworzył tak zwane *bomby kryptologiczne* – urządzenia mechaniczno elektryczne, które wspierały proces łamania szyfru Enigmy. Dały one początek pierwszym komputerom i informatyce.

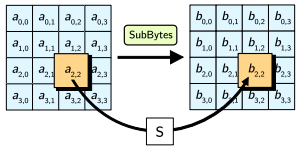
7.2 Współczesne podejście do konstrukcji szyfrów

W roku 1975 nastąpił swego rodzaju przełom w podejściu do projektowania szyfrów. W tym roku opublikowano bowiem standard DES (Data Encryption Standard). Algorytm szyfrowania symetrycznego opracowany przez firmę IBM. Nowością w tym przypadku było opublikowanie kompletnej dokumentacji szyfru. Od początku zatem przyjęto założenie, że bezpieczeństwo szyfrowania zależy jedynie od bezpieczeństwa klucza, a nie utajnienia metody szyfrowania. Zmiana była rewolucyjna o tyle, że przed standardem DES utajniano nie tylko klucze kryptograficzne, ale również sposób szyfrowania. To nowe podejście stało się motorem rozwoju kryptoanalizy szyfrów symetrycznych. Wielu naukowców zajmujących się kryptologią, skupiło swoją uwagę na poszukiwaniu słabości zaproponowanego standardu. Dzięki intensywnym pracom powstały takie techniki, jak kryptoanaliza różnicowa i kryptoanaliza liniowa. Standard ten został wycofany z użytku i zastąpiony szyfrem AES (Advanced Encryption Standard) w roku 2001. Tym razem standard szyfrowania został wyłoniony w ramach otwartego, międzynarodowego konkursu. Algorytm AES stał się, podobnie jak

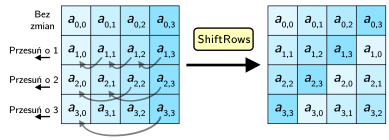
Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

jego poprzednik, kołem zamachowym do badania nowych metod kryptoanalizy. Najbardziej znaczącym efektem prac naukowców była w tym przypadku metoda kryptoanalizy algebraicznej.

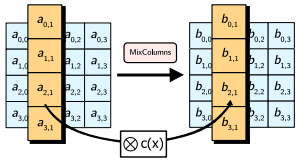
Warto pokazać konstrukcję tego szyfru, gdyż jest ona bardzo estetyczna od strony matematycznej i doskonale pokazuje, w jaki sposób jego autorzy uczynili go odpornym na kryptoanalizę różnicową i liniową. Nie będziemy się tutaj koncentrowali na dokładnym opisie całego szyfru AES, a jedynie na jego pojedynczej rundzie (algorytm realizuje 10, 12 lub 14 rund w zależności od długości klucza).



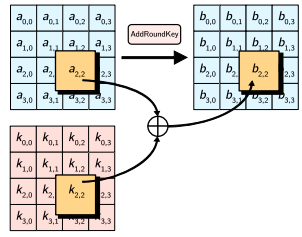
a) Przekształcenia `SubBytes`



b) Przekształcenie `ShiftRows`



c) Przekształcenia `MixColumns`



d) Przekształcenie `AddRoundKey`

Rysunek 7.1: Przekształcenia wchodzące w skład pojedynczej rundy szyfru AES [źródło: domena publiczna]

AES jest szyfrem blokowym szyfrującym porcje danych o długości 128 bitów. Każda taka porcja dzielona jest na 16 bajtów (8-bitowych kawałków). W każdej rundzie te 16 bajtów poddawane jest czterem podstawowym operacjom: `SubBytes`, `ShiftRows`, `MixColumns` i `AddRoundKey`. Działanie poszczególnych operacji zostało zilustrowane na Rysunku 7.1. Z matematycznego punktu widzenia każdy bajt traktowany jest jako element struktury algebraicznej, nazywanej *ciałem*. Jest to taki zbiór elementów, w którym można wykonywać dodawanie, odejmowanie i mnożenie. Dodatkowo istnieje w tym zbiorze 0 i 1, a wszystkie elementy poza zerem mają swoją odwrotność. Każdy bajt `00`, `01`, ..., `FF` traktowany jest jako wielomian

$$\begin{aligned}(B)_{16} &= (b_7b_6b_5b_4b_3b_2b_1b_0)_2 \\ &= b_7X^7 + b_6X^6 + b_5X^5 + b_4X^4 + b_3X^3 + b_2X^2 + b_1X + b_0,\end{aligned}$$

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

a wynik każdej operacji arytmetycznej powstaje przez wykonanie odpowiedniego działania i zredukowanie wyniku do reszty z dzielenia przez wielomian definiujący ciało. W tym przypadku jest to $f(X) = X^8 + X^4 + X^3 + X + 1$. Osoby zainteresowane szczegółami działań arytmetycznych zachęcamy do zapoznania się z tematyką *ciał skończonych* lub *ciał Galois*.

Ćwiczenie 7.1 Aby wykonywać działania w ciele Galois $GF(2^8)$, należy pamiętać o dwóch zasadniczych zasadach:

1. wynik obliczeń zawsze redukujemy do reszty z dzielenia przez wielomian $f(X) = X^8 + X^4 + X^3 + X + 1$,
2. wszystkie liczby parzyste zastępujemy przez 0, a nieparzyste przez 1 – to wynika z tak zwanej *charakterystyki ciała*, która w tym przypadku wynosi 2 (wszystkie współczynniki wielomianów redukowane są do reszty z dzielenia przez 2).

Załóżmy teraz, że mamy przez siebie pomnożyć dwa bajty: `80` i `20`. Bajty te reprezentują dwa wielomiany: $g(X) = X^7$ i $h(X) = X^5$. Iloczyn tych wielomianów to $m(X) = X^{12}$. Teraz konieczne jest wyznaczenie reszty z dzielenia wielomianu m przez f, którą oznaczamy przez $m \bmod f$. W przypadku wielomianów, taka redukcja może być realizowana przez eliminowanie jednomianu o najwyższej potędze. Pamiętając, że liczby parzyste zastępujemy przez 0, a nieparzyste przez 1 możemy dokonać redukcji w następujący sposób:

$$\begin{aligned} m(X) \bmod f(X) &= X^{12} - X^4 f(X) \\ &= X^8 + X^7 + X^5 + X^4 \\ &= X^8 + X^7 + X^5 + X^4 - f(X) \\ &= X^7 + X^5 + X^3 + X + 1. \end{aligned}$$

Możemy zatem zapisać, że `80`·`20` = `AB`. Spróbuj teraz samodzielnie wymnożyć bajty: `80` i `83`. Reprezentują one wielomiany: $g(X) = X^7$ i $h(X) = X^7 + X + 1$. W wyniku tego działania powinieneś otrzymać 1, co oznacza, że jeden z bajtów jest odwrotnością drugiego. ■

Jak dotychczas w szyfrze AES znaleziono jedną słabość. Jest nią przekształcenie `SubBytes`. Z matematycznego punktu widzenia przekształcenie to możemy zapisać jako

$$y = A(x^{-1}) + b,$$

gdzie A jest pewnym odwracalnym przekształceniem liniowym, a b jest ustalonym bajtem. Z algebraicznego punktu widzenia równanie to

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

można przekształcić do postaci

$$xA^{-1}(y-b) = 1.$$

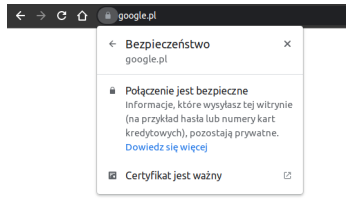
Dzięki temu kryptoanalizę można sprowadzić do rozwiązywania układu równań stopnia drugiego. Wykonując odpowiednie zamiany zmiennych, można ten układ sprowadzić do układu równań liniowych o bardzo dużym rozmiarze. Takie podejście określamy dzisiaj mianem kryptoanalizy algebraicznej. Prace wielu naukowców wskazują, że atak z użyciem opisanej metody może być skuteczniejszy niż przeszukiwanie przestrzeni wszystkich kluczy. Niemniej złożoność tego ataku jest tak duża, że póki co pozostaje on poza zasięgiem obliczeniowym nawet największych superkomputerów.

7.3 Kryptografia z kluczem publicznym – przełom w zabezpieczaniu komunikacji

Podstawowym problemem w stosowaniu kryptograficznej ochrony informacji jest konieczność wcześniejszej wymiany kluczy szyfrujących. Musi się ona odbyć w warunkach całkowitej poufności, a to najczęściej oznacza konieczność albo osobistego spotkania, albo przynajmniej przekazania kluczy przez zaufanego kuriera. Jest to zatem dość kosztowne rozwiązanie jeżeli mówimy o wymianie informacji z kimś, kto znajduje się na drugim końcu Świata. Rozwiązanie tego problemu przyniosła druga połowa lat 70-tych XX wieku. W roku 1976 Witfield Diffie oraz Martin Hellman zaproponowali pierwszy protokół, pozwalający na ustalenie wspólnego sekretu (klucza szyfrującego) przy użyciu publicznego kanału komunikacyjnego. Rok później Ron Rivest, Adi Shamir i Leonard Adleman zaproponowali algorytm szyfrowania asymetrycznego oraz podpisu cyfrowego. Obie te metody zrewolucjonizowały podejście do zabezpieczania informacji i dały podwaliny do bezpiecznej komunikacji elektronicznej.

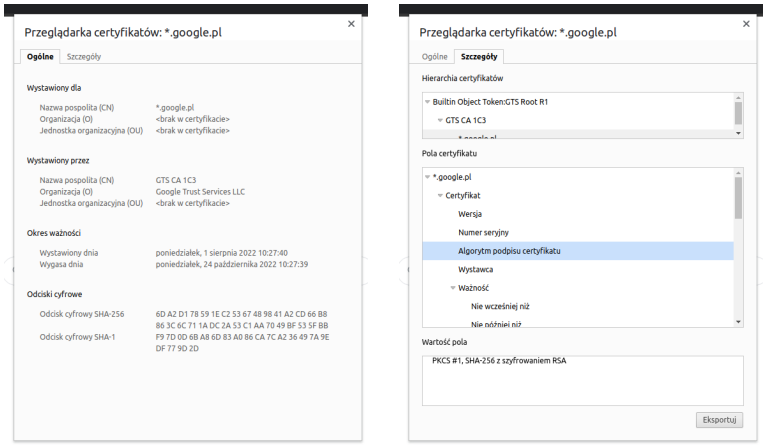
Dzisiaj niemal każda witryna posiada swój cyfrowy certyfikat i umożliwia nawiązanie z nią bezpiecznej, szyfrowanej komunikacji. Na Rysunku 7.2 przedstawiono komunikat przeglądarki Chrome, która informuje o zabezpieczonej transmisji z witryną google.pl.

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.



Rysunek 7.2: Informacja przeglądarki na temat zabezpieczenia połączenia z witryną (połączenie szyfrowane protokołem HTTPS)

Szczegóły cyfrowego certyfikatu przedstawiono na Rysunku 7.3. Certyfikat jest dokumentem podpisanym cyfrowo, który zawiera informacje dotyczące właściciela, klucza publicznego, użytych algorytmów oraz sposobu użycia klucza. Dzięki tym informacjom przeglądarka może nawiązać bezpieczne połączenie ze stroną internetową. Taka zaszyfrowana transmisja jest dzisiaj podstawą wszelkich usług bankowych i sklepów internetowych.



Rysunek 7.3: Informacja przeglądarki na temat certyfikatu wykorzystane do zabezpieczenie komunikacji ze stroną internetową (w szczegółach informacja na temat zastosowania algorytmu RSA do podpisania certyfikatu)

Pozostawmy jednak stronę techniczną i zobaczmy, jaka matematyka kryje się za protokołem Diffiego-Hellmana i algorytmem RSA. Podstawę obu systemów stanowi arytmetyka resztowa. Mieliśmy już z nią do czynienia przy okazji szyfru Cezara. Określiliśmy bowiem prze-

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

kształcenie szyfrujące jako $f(x) = x + 3 \bmod 26$. Zatem interesowały nas tak naprawdę reszty z dzielenia przez 26. W przypadku protokołu Diffiego-Hellmana (DH) wykorzystujemy podobny mechanizm. Zakładamy bowiem, że znana jest pewna duża liczba pierwsza p oraz pewna liczba g zwana generatorem o tej własności, że zbiór

$$\langle g \rangle = \{g^1 \bmod p, g^2 \bmod p, \ldots, g^{p-1} \bmod p\}$$

zawiera wszystkie reszty z dzielenia od 1 do $p-1$. Aby protokół DH był odporny na różnego rodzaju ataki, poszukuje się liczb pierwszych postaci $p = 2q+1$, gdzie q również jest liczbą pierwszą. Wbrew pozorom, znalezienie liczby pierwszej o takich własnościach nie jest wcale trudne. Wynika to przede wszystkim z faktu, że gęstość liczb pierwszych, w zbiorze liczb naturalnych, jest relatywnie duża. Można bowiem wykazać, że liczb pierwszych mniejszych od n jest mniej więcej $\frac{n}{\ln n}$. Oznacza to, że średnio, co $(\ln n)$-ta liczba jest pierwsza. Do weryfikacji, czy liczba naturalna jest liczbą pierwszą stosowane są różnego rodzaju testy. Jednym z najpopularniejszych jest test Rabina-Millera. Jest to test probabilistyczny o bardzo dużej szybkości.

Ćwiczenie 7.2 Rozważmy liczbę pierwszą $p = 2q+1 = 11 = 2 \cdot 5 + 1$. Można wykazać, że dla liczb pierwszych postaci $2q+1$ na to, aby liczba g była generatorem potrzeba i wystarcza spełnienie dwóch następujących zależności:

1. $g^2 \bmod p \neq 1$,
2. $g^q \bmod p \neq 1$.

Dzięki powyższemu warunkowi możemy zatem stwierdzić, że liczba 2 jest generatorem dla liczby 11, gdyż $2^2 \bmod 11 = 4 \neq 1$ oraz $2^5 \bmod 11 = 10 \neq 1$. Natomiast liczba 10 nie jest generatorem, gdyż $10^2 \bmod 11 = 1$. Wyznacz wartości wyrażeń $2^k \bmod 11$ dla liczb $k \in \{1, 2, \ldots, 10\}$ i sprawdź, że żadna wartość nie została powtórzona. Znajdź generator dla liczby pierwszej $p = 23 = 2 \cdot 11 + 1$.

■

Mając do dyspozycji liczbę pierwszą p oraz wspomniany generator g możemy zrealizować protokół opracowany przez Diffiego i Hellmana. Zakładamy przy tym, że wartości p i g są publicznie znane wszystkim stronom. Przyjmijmy, że Alicja i Bob chcą w bezpieczny sposób komunikować się ze sobą na przykład za pomocą szyfru AES. Aby to zrobić muszą posiadać klucz, który będzie znany tylko im. Zadaniem protokołu DH jest właśnie ustalenie wspólnego sekretu znanego tylko Alicji i Bobowi.

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

Alicja	Internet	Bob
Wylosowanie klucza $a \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$		Wylosowanie klucza $b \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$
Wyznaczenie $h_a = g^a \bmod p$		Wyznaczenie $h_b = g^b \bmod p$
	$h_a \rightarrow$ $\leftarrow h_b$	
Wyznaczenie $k = (h_b)^a \bmod p$ $= (g^b)^a \bmod p$ $= g^{ab} \bmod p$		Wyznaczenie $k = (h_a)^b \bmod p$ $= (g^a)^b \bmod p$ $= g^{ab} \bmod p$

Jak widzimy, Alicja i Bob są w stanie wyznaczyć identyczną wartość k, przy czym w kanale transmisyjnym pojawiają się jedynie wartości h_a oraz h_b. Całe bezpieczeństwo tego protokołu oparte jest na założeniu, że wyznaczenie sekretu $g^{ab} \bmod p$ jest obliczeniowo bardzo trudne, jeżeli znane są jedynie $p, g, h_a = g^a \bmod p$ i $h_b = g^b \bmod p$. Zatrzymajmy się teraz przez chwilę nad stwierdzeniem *obliczeniowo bardzo trudne*. Jest ono dzisiaj podstawą wszelkich zabezpieczeń teleinformatycznych. To znaczy wyszukujemy problem, którego rozwiązanie z obliczeniowego punktu widzenia wymaga niewyobrażalnych zasobów i próbujemy na jego bazie stworzyć algorytm szyfrowania, podpisu cyfrowego lub wymiany kluczy. Należy przy tym pamiętać, że naukowcy cały czas poszukują nowych, lepszych metod rozwiązywania wielu problemów obliczeniowych. Może się zatem zdarzyć, że konieczne stanie się wydłużenie kluczy bądź nawet zmiana systemu zabezpieczeń. Na przykład na początku tego stulecia dla protokołu DH powszechnie używano liczb pierwszych, które mają 1024 bity. Dzisiaj dopuszcza się długości nie mniejsze niż 3072 bity. Natomiast dla nowych aplikacji rekomendowane jest zastąpienie arytmetyki liczbowej przez arytmetykę na punktach krzywej eliptycznej. Z uwagą należy się również przyglądać rozwojowi komputerów kwantowych. Dla takich komputerów problem stanowiący podstawę bezpieczeństwa protokołu DH jest bowiem obliczeniowo łatwy.

Przejdźmy teraz do algorytmu RSA. Jest to o tyle fenomenalne rozwiązanie, że daje możliwość zarówno realizacji szyfrowania z kluczem publicznym, jak i wykonywania podpisu cyfrowego. Algorytm ten na długie dekady zagościł w niemal wszystkich implementacjach służących do ochrony transmisji danych. Podstawą jego bezpieczeństwa jest problem rozkładu liczb na czynniki pierwsze. Aby zrealizować algorytm

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

RSA, należy wygenerować dwie liczby pierwsze p oraz q, a następnie wyznaczyć ich iloczyn $n = pq$. Dodatkowo generujemy parę kluczy kryptograficznych: klucz publiczny e oraz klucz prywatny d o tej własności, że

$$ed \bmod (p-1)(q-1) = 1.$$

Klucz publiczny e wraz z liczbą n udostępniamy wszystkim zainteresowanym nawiązaniem z nami bezpiecznego połączenia. Natomiast klucz prywatny d oraz liczby pierwsze p i q przechowujemy w bezpiecznym miejscu. Załóżmy, że ktoś chce do nas zaszyfrować pewną wiadomość m. Wtedy wyznacza szyfrogram c w następujący sposób

$$c = m^e \bmod n.$$

Aby odszyfrować przesłaną wiadomość c, konieczne jest posiadanie klucza prywatnego d

$$t = c^d \bmod n = (m^e)^d \bmod n = m^{ed} \bmod n.$$

Tylko dlaczego t powinno dawać wartość zaszyfrowanej wiadomości m? Okazuje się, że odpowiedzi na to pytanie udzielił już kilka wieków wcześniej Leonard Euler, który sformułował następujące twierdzenie

Twierdzenie 7.1 Jeżeli największy wspólny dzielnik liczb a i n wynosi 1, to zachodzi następująca zależność

$$a^{\varphi(n)} \bmod n = 1,$$

gdzie $\varphi(n)$ jest liczbą liczb naturalnych względnie pierwszych z n i mniejszych od n. W szczególności, jeżeli $n = pq$, to $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$.

Aby wyjaśnić, dlaczego powyższe twierdzenie pozwala na skuteczne deszyfrowanie wiadomości, musimy powrócić do warunku narzuconego na klucze e i d. Przypomnijmy, że spełniają one zależność $ed \bmod (p-1)(q-1) = 1$. Z definicji dzielenia z resztą oznacza to, że istnieje pewna całkowita i nieujemna liczba s, która spełnia równanie $ed = s(p-1)(q-1) + 1$. Zatem możemy zapisać

$$\begin{aligned} m^{ed} \bmod n &= m^{s(p-1)(q-1)+1} \bmod n \\ &= \left(m^{(p-1)(q-1)}\right)^s \cdot m \bmod n. \end{aligned}$$

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

Twierdzenie Eulera mówi nam jednak, że jeżeli m i n są względnie pierwsze, to $m^{(p-1)(q-1)} \bmod n = 1$. Otrzymujemy zatem

$$t = m^{ed} \bmod n = (1)^s \cdot m \bmod n = m.$$

Co jednak w przypadku, gdy wiadomość m nie jest względnie pierwsza z n. Można wykazać, że również w takich przypadkach proces deszyfrowania daje poprawną wartość. Z taką wiadomością jest jednak poważniejszy problem. Znalezienie takiej niezerowej wiadomości oznacza bowiem możliwość wyznaczenia czynników p i q. W konsekwencji posiadacz takiego m może również wyznaczyć klucz prywatny d i złamać kryptosystem. Pamiętajmy jednak, że minimalna długość kiedykolwiek stosowanych kluczy RSA wynosi 1024 bity. W praktyce oznacza to tyle, że wylosowanie takiej wiadomości jest tak samo prawdopodobne jak wygrana w Lotto 16 razy z rzędu.

Algorytm RSA posiada sporo luk, które można wyeliminować przez narzucenie odpowiednich warunków na czynniki p i q. Dodatkowo wprowadza się również specjalne formatowanie wiadomości, aby zmniejszyć ryzyko nieuprawnionego jej odczytania. Za pomocą RSA można również realizować podpis cyfrowy. Przebieg obliczeń jest podobny, tylko w pierwszej kolejności wykorzystywany jest wykładnik prywatny d. Za jego pomocą tworzony jest podpis

$$h = m^d \bmod n.$$

Następnie autor udostępnia parę (m, h) oraz swój klucz publiczny (e, n). Dzięki temu każdy może zweryfikować, czy podpis pod wiadomością jest autentyczny. Jeżeli bowiem wartość

$$t = h^e \bmod n$$

jest tożsama z m, to uznajemy podpis za poprawny i złożony przez posiadacza klucza prywatnego d. W przeciwnym razie uznajemy podpis za fałszywy.

7.4 Podsumowanie

Przedstawione w tym rozdziale tematy, związane z szyfrowaniem i podpisami cyfrowymi, stanowią jedynie wstęp do obszernej dziedziny, jaką jest kryptologia. Celem tego rozdziału było pokazanie, w jaki sposób nowoczesne metody bezpieczeństwa teleinformatycznego bazują na matematyce i jak istotna jest ona w zapewnieniu poufności i niezaprzeczalności transmisji cyfrowej. Czytelników zainteresowanych tą tematyką odsyłamy do obszernej literatury dotyczącej tematu kryptograficznej ochrony informacji.

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

8. Analiza dużych zbiorów danych

Leszek Klich

8.1 Wstęp

Znaczenie Big Data staje się coraz bardziej popularne i kojarzy się głównie z pracą analityków, którzy mając dostęp do olbrzymich zbiorów danych poszukują rozwiązań dla biznesu. Istnieje kilka definicji terminu Big Data, jednak część z nich nie wydaje się precyzyjnie oddawać rzeczywistość. Otóż terminem Big Data określa się duże zbiory danych. Słowo „duże" jest jednak nieprecyzyjne, zatem uznajmy, że są to zbiory o takim rozmiarze, że trudno jest poddać je analizie przy pomocy tradycyjnych metod. To także odniesienie do wszelkich czynności szukania, pobierania, gromadzenia i przetwarzania danych. Rezultatem analizy może być wiedza, która może być wygenerowanym profilem konsumenta lub firmy, a w konsekwencji przekłada się na zwiększenie konkurencyjności oraz większych dochodów. Analiza danych, wsparta algorytmami sztucznej inteligencji, może być także przydatna do wszelkiego typu predykcji niezbędnej w przemyśle.

8.2 Źródła danych i podstawowe problemy

Współczesne systemy informacyjne i produkcyjne gromadzą ogromne ilości danych, które stale się powiększają. Są one dostępne w postaci baz danych, plików tekstowych i binarnych, zaś ich źródłem mogą

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

być witryny internetowe, zawierające dane w postaci np. tabel. Jednakże część zebranych danych może okazać się mniej wartościowa, ponieważ mamy w tym przypadku do czynienia z terminem „szumu informacyjnego". Termin ten oznacza dane nieistotne, niezweryfikowane, które mogą zaburzyć wyniki analizy. Innym problemem jest uszkodzenie danych, np. na skutek błędów transmisji. Z tego powodu, jednym z pierwszych zadań dla analityka jest prawidłowe wyczyszczenie zbioru i posegregowanie danych, a następnie dokonanie ich analizy. Należy także zwrócić uwagę na filtrowanie danych, czyli redukcję, która przyspiesza proces analizy, a czasem w ogóle ją umożliwia. Jest to szczególnie istotne przy pracy z bardzo dużymi zbiorami danych. Czyszczenie, segregacja, naprawa błędów i filtrowanie danych może odbywać się przy pomocy półautomatycznych narzędzi, zaś czasochłonność tego etapu jest o wiele większa niż sam etap analizy. W tym rozdziale nie będziemy zajmować się tematyką procesu przygotowania danych. Zamiast tego, dane będą generowane lub dostarczone jako prawidłowe pliki zawierające zestawy danych.

8.3 Język Python i biblioteki do analizy danych

Standardowa instalacja języka Python nie zawiera wystarczająco wydajnych obliczeniowo złożonych typów danych. Mamy do dyspozycji listy czy słowniki, jednakże ze względu na ich uniwersalność charakteryzują się one powolnym działaniem w przypadku przechowywania dużej ilości wpisów. Z tego powodu nie są one przeznaczone do szybkich obliczeń numerycznych. Na szczęście istnieje szybka, wydajna i darmowa biblioteka, która niweluje tę przypadłość języka. Biblioteka NumPy, bo o niej będzie teraz mowa, została stworzona, aby umożliwić szybkie i sprawne operacje na macierzach. Czym różni się od standardowej listy w języku Python? Przypomina ona tablice znane z innych języków programowania, czyli przechowuje elementy tego samego typu (zazwyczaj typy liczbowe). Poza tym listy są jednowymiarowe, zaś tablice NujmPy - wielowymiarowe. Oprócz tego, listy umożliwiają przechowywanie różnych typów zmiennych, co czyni je znacznie wolniejszymi od tablic obecnych w NumPy.

Drugą z bibliotek, którą warto się zainteresować jest Pandas. Została ona stworzona na bazie poprzedniej. Pandas to jeden z najbardziej rozbudowanych pakietów przeznaczonych do analizy danych dla języka Python. Pozwala między innymi na odczyt danych z wielu źródeł, czyszczenie, filtrowanie i grupowanie danych oraz oczywiście na ich analizę. Biblioteka jest niezwykle popularna wśród analityków oraz

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

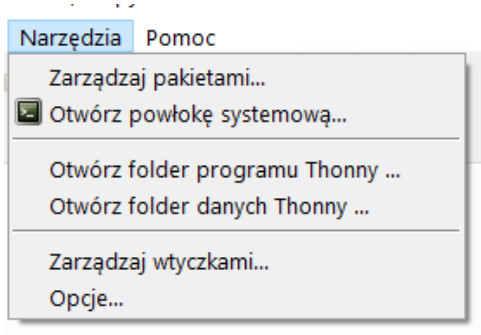
naukowców ze względu na jej dynamiczny rozwój oraz możliwości. Zasada działania obiektu Pandas, który nosi nazwę DataFrame, jest analogiczna do tabeli w programie Excel, jednakże biblioteka działa w trybie tekstowym i do jej obsługi wymagana jest podstawowa znajomość języka Python. Jest jednak bardzo uniwersalna, szybka i przy tym darmowa. Oto kluczowe funkcjonalności biblioteki Pandas:

- bardzo szybki obiekt DataFrame, który automatycznie indeksuje zbiór;
- zawiera narzędzia do ładowania danych z różnych formatów plików oraz baz danych;
- narzędzia do wypełniania brakujących danych;
- praca z zestawami dat w różnych formatach;
- przycinanie, indeksowanie i tworzenie podzbiorów dużych zbiorów danych;
- możliwość usuwania i wstawiania danych w strukturze;
- grupowanie i przekształcenia danych;
- obsługa szeregów czasowych.

8.4 Instalacja bibliotek

Zakładam, że język Python został już zainstalowany zgodnie z instrukcją zawartą w załączniku zatytułowanym „Instrukcja instalacji oprogramowania Python".

Podczas nauki analizy danych będziemy korzystać z bibliotek: NumPy, Pandas oraz Matplotlib. Są to biblioteki przeznaczone do analizy i wizualizacji danych. Aby zainstalować biblioteki, należy uruchomić środowisko Thonny i z menu **Narzędzia** wybrać polecenie **Otwórz powłokę systemową**, co widać na rysunku 8.1.



Rysunek 8.1: Uruchamianie powłoki systemowej w środowisku Thonny

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

Następnie w oknie powłoki systemowej należy zainstalować biblioteki, wykonując poplecenia : **pip install numpy** <Enter>, następnie **pip install pandas** <Enter>, a na koniec **pip install matplotlib** <Enter>. Po każdym wywołaniu polecenia **pip** nastąpi proces pobierania i instalacji bibliotek, co może potrwać w zależności od prędkości łącza internetowego.

Jeśli instalator pakietu wykryje, że wymagana biblioteka lub zależność została już wcześniej zainstalowana, pominie jego instalację i wyświetli odpowiednią informację. Po zainstalowaniu pakietów NumPy, Pandas i Matplotlib, proces instalacji środowiska i bibliotek jest zakończony.

8.5 Podstawy biblioteki NumPy

Podstawowym typem danych NumPy jest typ ndarray (N-dimmentional array), czyli tablica wielowymiarowa. Jest to w rzeczywistości tablica zawierająca jeden typ danych, analogicznie jak w innych języków programowania. Oczywiście NumPy pozwala także na tworzenie tablic jednowymiarowych i służą do tego następujące komendy:

- numpy.array() - podajemy wszystkie wartości tablicy;
- numpy.arange() - podajemy zakres, jakim uzupełniamy tablicę oraz odstęp liczbowy pomiędzy nimi;
- numpy.linspace() - przydatny podczas tworzenia wykresów, gdzie podajemy zakres liczbowy oraz podział liczbowy.

W tym rozdziale zajmiemy się wyłącznie generowaniem tablicy jednowymiarowej, przypiszemy do niej wartości funkcji sinus i wygenerujemy prosty wykres. W pierwszym etapie wygenerujmy tablicę jednowymiarową przy pomocy polecenia arange, której parametrami są: liczba początkowa (domyślnie 0), liczba końcowa oraz krok (odstęp między wartościami). Domyślny rozmiar kroku wynosi 1, lecz ustawiamy go na wartość rzeczywistą 0.01.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

t = np.arange(0.0, 2.0, 0.01) # zmienna t to czas
s = np.sin(2 * np.pi * t) # s = wartości funkcji sinus

print(t)
```

Listing 8.1: Generowanie tablicy jednowymiarowej

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

Na koniec wyświetlamy wyniki zmiennej *t*, oznaczającej w tym przypadku czas. Otrzymane wyniki to zawartość tablicy z krokiem 0.01:

> [0 0.01 0.02 0.03 0.04 0.05 0.06 0.07 0.08 0.09 0.1 0.11 0.12
> 0.13 0.14 0.15 0.16 0.17 0.18 0.19 0.2 0.21 0.22 0.23 0.24
> 0.25 0.26 0.27 0.28 0.29 0.3 0.31 0.32 0.33 0.34 0.35 0.36
> 0.37 0.38 0.39 0.4 0.41 0.42 0.43 0.44 0.45 0.46 0.47 ... 9.74
> 9.75 9.76 9.77 9.78 9.79 9.8 9.81 9.82 9.83 9.84 9.85 9.86
> 9.87 9.88 9.89 9.9 9.91 9.92 9.93 9.94 9.95 9.96 9.97 9.98
> 9.99].

Ze względu na bardzo długi ciąg liczb tablicy (wynikający z podanego kroku 0.01), część wartości zostało pominięte.

Obiekt **ndarray x** jest tworzony z funkcji np.arange() i są to wartości dla osi x (czas). Wartości funkcji sinus na osi y są przechowywane w innym obiekcie (ndarray y). Obserwując wartości tablicy w postaci liczbowej, bardzo trudno jest je człowiekowi interpretować. Można je jednak umieścić na wykresie przy pomocą funkcji plot() - dostępnej w bibliotece Matplotlib. Aby tego dokonać, rozbudujmy powyższy przykład programu o kod wyświetlający prosty wykres:

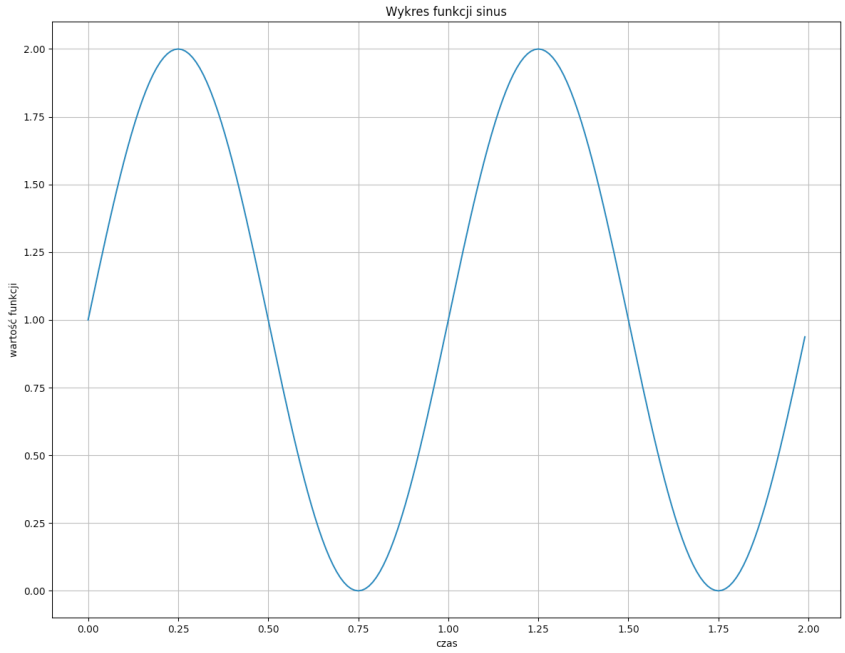
```
fig, ax = plt.subplots()
ax.plot(t, s)

# nazwy etykiet x i y oraz tytuł wykresu
ax.set(xlabel='czas', ylabel='wartości funkcji', title='
    Funkcja sinus')

# dodanie siatki do wykresu
ax.grid()

# wyświetlenie wykresu
plt.show()
```

Listing 8.2: Generowanie wykresu funkcji sinus

Efekt działania kompletnego programu ilustruje obrazek 8.2. Obserwując wykres, można łatwo zauważyć, że że mamy do czynienia z sinusoidą.

W ramach ćwiczeń można zmienić argumenty funkcji arange poprzez zmianę kroku (np. na 0.1), zakresu czy wykorzystać inne funkcje dostępne w NumPy (np. wygenerować wykres funkcji cosinus). Dzięki temu będziemy mogli sprawdzić, jak zmienia się wykres oraz automatyczne dopasowanie obszaru wykresu do danych dzięki bibliotece Matplotlib.

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.



Rysunek 8.2: Wykres funkcji sinus

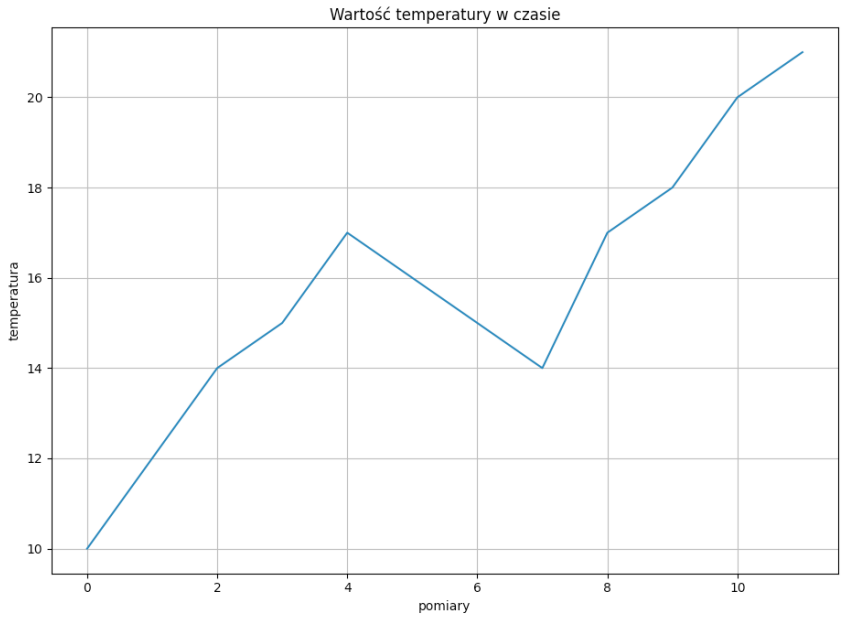
W kolejnym przykładzie zajmiemy się wizualizacją wartości temperatury w pewnym okresie czasu. W tym celu ponownie wygenerujemy zakres przy pomocy funkcji **arange()**, lecz tym razem przypiszemy do niego dane wartości temperatur przy pomocy tablicy **temperatura**.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

t = np.arange(0, 12, 1)
temperatura = [10, 12, 14, 15, 17, 16 , 15, 14, 17, 18, 20,
    21]

fig, ax = plt.subplots()
ax.plot(t, temp)
ax.set(xlabel='pomiary', ylabel='temperatura', title='Wykres
    temperatury w czasie')
ax.grid()
plt.show()
```

Listing 8.3: Generowanie wykresu temperatur

Efektem działania programu jest wykres z rysunku 8.3. Obserwując wykres można zauważyć, że liczba pomiarów jest stosunkowo niewielka, zaś ręczne umieszczanie kolejnych pomiarów w tablicy **temperatura** jest niewygodne i wymaga zmiany kodu źródłowego programu.

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.



Rysunek 8.3: Wykres temperatury

O wiele lepszym sposobem na przechowywanie danych pomiarowych jest plikowa baza danych. Pliki zawierające dane zapisane w postaci kolumn i wierszy są bardzo popularnym sposobem przechowywania danych przez różnego typu urządzenia. Pliki te można nazwać logami, ponieważ zapisują one zdarzenia czy pomiary z różnego rodzaju czujników w postaci wierszy. Najbardziej popularnym typem pliku tekstowego jest typ CSV, który zawiera kolumny oraz pola oddzielone umownym znakiem (zwykle przecinkiem). Zestaw pól to wiersz, który może zawierać dowolną ilość pól. Pliki CSV są typu tekstowego, co oznacza, że można je otwierać i edytować przy pomocy dowolnego edytora tekstowego (np. Notatnika). Do odczytania plików tego typu wykorzystamy bibliotekę Pandas.

Wykorzystanie biblioteki Pandas

W tym podrozdziale zajmiemy się bardziej poważną analityką. Oznacza to, że będziemy pracować z danymi, dostarczonymi w postaci plików .CSV. Jest to jeden z bardziej rozbudowanych pakietów, który umożliwia analizę danych w Python. Co więcej - przy pomocy Pandas można wczytywać pliki, czyścić, modyfikować i analizować zbiory danych.

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

Zanim przejdziemy do odczytu danych z zewnętrznych plików, warto na początek zrozumieć złożone typy danych, które dostarcza pakiet Pandas. Pierwszy z typów jest seria, zaś drugim - tzw. DataFrame. Serię można porównać do kolumny w programie Excel. Aby utworzyć serię danych, należy użyć metody **pandas.Series()**, zaś jako argumenty podać wartości numeryczne. Utwórzmy zatem serię danych.

```
import pandas as pd

seria = pd.Series([-3, -1, 5, 15, 19, 21, 23])
```

Listing 8.4: Tworzenie serii danych przy pomocy Pandas

Utworzoną serię danych można wyświetlić na ekranie przy pomocy **print(seria)**, jednakże w tym przypadku pakiet daje nam do dyspozycji kilka dodatkowych metod.

- **head()** - metoda wyświetlająca początek obiektu DataFrame (domyślnie jest to 5 wierszy);
- **tail()** - wyświetla domyślnie 5 ostatnich wierszy, lecz jako argument można podać inną liczbę;
- **sample(5)** - wyświetli 5 losowych wierszy.

Wyświetlenie zawartości danych umożliwia wstępne zapoznanie się ze zbiorem. Obie metody mogą przyjmować opcjonalny argument w postaci liczby całkowitej, która oznacza liczbę wyświetlanych wierszy. Aby wyświetlić pierwsze 10 wierszy, wystarczy wywołać: print(seria.head(10)). Wynikiem działania będzie następujący rezultat:

```
0 -3
1 -1
2 5
3 15
4 19
5 21
6 23
dtype: int64
```

Jak widać, Pandas dodał automatycznie dodatkową kolumnę index, która pozwala na identyfikację dowolnego wiersza. Dodatkowo metoda head() wyświetliła na końcu typ danych (int64). Jest to typ całkowity używany przez bibliotekę do przechowywania bardzo dużych wartości. Oczywiście gdybyśmy zadeklarowali serię, w której użylibyśmy wartości rzeczywistej, Pandas dopasowałby typ jako float64.

Aby dowiedzieć się więcej o serii, można posłużyć się metodą info(), np. **print(df.info())**. Wyświetlone zostaną informację na temat indeksów, serii, typów danych oraz zajętości pamięci.

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

```
RangeIndex: 7 entries, 0 to 6
Series name: None
Non-Null Count  Dtype
--------------  -----
7 non-null      int64
dtypes: int64(1)
memory usage: 184.0 bytes
```

Teraz dla przykładu wykonamy na obiekcie metodę describe() i wygenerujemy podstawowe statystyki, takie jak ilość danych w serii, wartość średnią, minimalną, maksymalną, odchylenie standardowe oraz kwantyle: 25%, 50% (mediana), 75%. Statystykę można wygenerować przy pomocy jednego wiersza: **print(seria.describe())**.

```
count 7.000000
mean 11.285714
std 10.796825
min -3.000000
25% 2.000000
50% 15.000000
75% 20.000000
max 23.000000
dtype: float64
```

Nic nie stoi na przeszkodzie, aby do tworzenia obiektu DataFrame wykorzystać standardową listę dostępną w języku Python. Należy jej zawartość przypisać do nowo tworzonego obiektu. Dzięki temu standardowe typy złożone, dostępne w języku Python, można poddawać analizie statystycznej.

```
lista = [['Patrycja',16],['Monika',12],['Andrzej',28],['
    Leszek',9]]

df = pd.DataFrame(lista)
df.columns = 'Imię', 'Wiek'

print(df)
```

Listing 8.5: Tworzneie DataFrame z listy Python

```
       Imię  Wiek
0  Patrycja    16
1    Monika    12
2   Andrzej    28
3    Leszek     9
```

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

W wyniku uruchomienia programu otrzymamy obiekt typu DataFrame. Można także wygenerować obiekt typu DataFrame ze standardowo dostępnego słownika w języku Python.

```
slownik = {'Imię':['Leszek', 'Monika', 'Patrycja', 'Andrzej'
    ], 'Miasto': ['Warszawa', 'Kraków', 'Gdańsk', 'Poznań']}

df = pd.DataFrame(slownik)

print(df)
```

Listing 8.6: Tworzenie DataFrame ze słownika Python

W wyniku uruchomienia programu również otrzymamy obiekt typu DataFrame.

```
      Imię    Miasto
0   Leszek  Warszawa
1   Monika    Kraków
2 Patrycja    Gdańsk
3  Andrzej    Poznań
```

Powyższe przykłady ilustrują, w jaki sposób istniejący program napisany w języku Python może współpracować z pakietem statystycznym Pandas.

Odczyt danych z pliku

Na tym etapie zajmiemy się operacją odczytu plików typu .CSV z dysku. Warto zaznaczyć, że Pandas może odczytywać różne typy plików, z czego najpopularniejsze to wspomniany .CSV oraz .JSON. Nic jednak nie stoi na przeszkodzie, aby odczytywać także pliki Excela. W tym podrozdziale zostanie omówiony wyłącznie odczyt typu tekstowego .CSV. Do odczytu plików tekstowych typu .CSV służy funkcja read_csv(). Funkcja ta może przyjmować szereg argumentów, lecz my skupimy się tylko na podstawowych. Przyjmijmy, że posiadamy plik z danymi temperatury w danym okresie, o następującej strukturze:

```
Data,Temp,Hum
2020/01/01, -12.0, 70
2020/01/02, -7.2, 80
...
2020/02/22, 5.1, 91
2020/02/24, 5.0, 91
2020/02/26, 8.1, 91
2020/02/28, 8.8, 91
```

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

Analizując początek pliku można zauważyć, że plik posiada nagłówek, w którym zostały zapisane nazwy kolumn, zaś same kolumny oddzielone są znakiem przecinka. Dodatkowo występują wartości w postaci liczb zmiennoprzecinkowych, w których znak kropki oddziela część całkowitą od części ułamkowej liczby. Oto przykład programu odczytującego plik o nazwie temp.csv wraz z niezbędnymi opcjami umożliwiającymi prawidłowy odczyt pliku:

```
df = pd.read_csv("temp.csv", decimal=".", delimiter=",")

print(df.info())
```

Listing 8.7: Tworzenie obiektu DataFrame i wypełnienie go danymi z pliku

Program tworzy obiekt DataFrame o nazwie df i w sposób automatyczny wczytuje do niego zwartość pliku **temp.csv**. Argument **decimal** oznacza znak rozdziału części całkowitej od ułamkowej liczby w kolumnie **Temp**, zaś opcja **delimiter** - znak rozdziału kolumn - w tym wypadku jest to przecinek. Podanie tej opcji jest konieczne, ponieważ domyślnym znakiem rozdziału jest średnik, zatem argument ten zmienia konfigurację funkcji **read_csv()** w taki sposób, aby dostosować się do konkretnego pliku, który chcemy analizować. Jeśli zaś chodzi o argument **decimal**, to należy również dostosować go do konwencji zawartej w pliku tekstowym. Na koniec wykorzystano funkcję info(), która wyświetli informacje na temat struktury pliku, jak poniżej:

```
<class 'pandas.core.frame.DataFrame'>
RangeIndex: 29 entries, 0 to 28
Data columns (total 3 columns):
 #   Column  Non-Null Count  Dtype
---  ------  --------------  -----
 0   Data    29 non-null     object
 1   Temp    29 non-null     float64
 2   Hum     29 non-null     int64
dtypes: float64(1), int64(1), object(1)
memory usage: 824.0+ bytes
```

Jak widać na podsumowaniu, plik zawiera 3 kolumny: datę, która została zinterpretowana przez bibliotekę jako typ obiektowy, temperaturę, która została przypisana jako typ float64 oraz wilgotność - typ int64. I faktycznie wszystko się zgadza oprócz pola data, która powinna być przypisana do typu datetime. Zmodyfikuj zatem wiersz odpowiedzialny za odczyt danych następująco:

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

```
df = pd.read_csv("temp.csv", decimal=".", \
     delimiter=",", parse_dates=['Data'])
```

Następnie ponownie uruchom program.

```
<class 'pandas.core.frame.DataFrame'>
RangeIndex: 29 entries, 0 to 28
Data columns (total 3 columns):
 #   Column  Non-Null Count  Dtype
---  ------  --------------  -----
 0   Data    29 non-null     datetime64[ns]
 1   Temp    29 non-null     float64
 2   Hum     29 non-null     int64
dtypes: datetime64[ns](1), float64(1), int64(1)
memory usage: 824.0 bytes
```

Tym razem pole daty zostało poprawnie przypisane jako typ datetime64. Ma to istotne znaczenie podczas filtrowania rekordów po dacie czy generowaniu wykresów, które jako oś x wykorzystują typ daty.

Wróćmy jeszcze do nagłówka pliku (Date,Temp,Hum), który informuje użytkownika o nazwach poszczególnych kolumn. Zdarzają się pliki tekstowe, które nagłówka nie posiadają lub posiadają nagłówek w ilości większej niż jeden wiersz. Na przykład:

```
Plik tekstowy wygenerowany ze stacji pogodowej.
Data,Temp,Hum
2020/01/01, -12.0, 70
2020/01/02, -7.2, 80
```

W tym wypadku należy wskazać funkcji **read_csv**, ile wierszy należy opuścić podczas odczytu. Służy do tego argument **skiprows**, który domyślnie jest ustawiony na **None**. Po analizie nagłówka pliku .CSV wiemy, że należy opuścić jedną linię. Możemy dodać ten parametr jako **skiprows=1** w funkcji **read_csv()**, czyli nasza linia odczytu pliku będzie wyglądać tak:

```
df = pd.read_csv("temp.csv", decimal=".", \
     delimiter=",", parse_dates=['Data'], \
     skiprows=1)
```

Ostatnim argumentem, który chciałbym omówić jest **usecols**, przy pomocy którego można zdefiniować kolumny, które zostaną odczytane z pliku do obiektu DataFrame. Jest to przydatna opcja, gdy posiadamy

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

pliki tekstowe z danymi, charakteryzujące się dużą ilością kolumn, z których można wybrać wyłącznie kolumny, które będą podlegać analizie. Ma to duże znaczenie w celu oszczędzania pamięci podczas analizy bardzo dużych zbiorów danych. W przypadku naszego pliku, jeśli istotnymi kolumnami są data oraz temperatura, warto wyłączyć kolumnę wilgotności w sposób następujący:

```
# Odczyt wyłącznie kolumn Data oraz Temp
kolumny = ["Data", "Temp"]
df = pd.read_csv("temp.csv", decimal=".", delimiter=",",
    parse_dates = ['Data'], usecols = kolumny)

print(df.info())
```

Listing 8.8: Odczyt zdefiniowanych kolumn z pliku .CSV

Modyfikacja programu przy użyciu **usecols** nie tylko zredukuje ilość kolumn i nasz obiekt DataFrame stanie się bardziej czytelny, lecz dodatkowo zmniejszy ilość wykorzystywanej pamięci RAM (z 824 bajtów do 592 bajty).

```
<class 'pandas.core.frame.DataFrame'>
RangeIndex: 29 entries, 0 to 28
Data columns (total 2 columns):
 #   Column  Non-Null Count  Dtype
---  ------  --------------  -----
 0   Data    29 non-null     datetime64[ns]
 1   Temp    29 non-null     float64
dtypes: datetime64[ns](1), float64(1)
memory usage: 592.0 bytes
```

Pozostało jeszcze dopracowanie nazw kolumn, które nierzadko mogą przyjmować nieintuicyjne nazwy. W przypadku naszego pliku są to Data oraz Temp, zaś chcielibyśmy nazwać przynajmniej kolumnę Temp bardziej przystępnie. W tym celu wykorzystamy metodę **rename(columns = 'nazwa_w_pliku' : 'nowa_nazwa', inplace = True)**. Użycie słowa kluczowego inplace=True oznacza, że operacja zmodyfikuje dane wewnątrz istniejącego obiektu. Pracując z danymi umieszczonymi na dysku w postaci plików CSV, kod realizujący odczyt pliku będzie zwykle identyczny lub bardzo podobny jak poniżej:

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

```
kolumny = ["Data", "Temp"]
df = pd.read$\_$csv("temp.csv", decimal=".", delimiter=",",
    parse_dates = ['Data'], usecols = kolumny)

df.rename(columns={'Temp': 'Temperatura', 'Data': 'Data
    pomiaru'}, inplace=True)

print(df.info())
```

Listing 8.9: Ostateczna wersja programu do odczytu pliku

Wykonajmy teraz kilka podstawowych operacji statystycznych na naszym obiekcie. Warto jedynie dodać, że w przypadku, gdy analiza dotyczy wyłącznie jednej kolumny, należy się do niej odwołać poprzez df['nazwa_kolumny']. Na początek kilka dostępnych funkcji:

- df['nazwa_kolumny'].min() - wartość minimalna,
- df['nazwa_kolumny'].max() - wartość maksymalna,
- df['nazwa_kolumny'].mean() - wartość średnia,
- df['nazwa_kolumny'].var() - wariancja kolumny,
- df['nazwa_kolumny'].sum() - suma wszystkich wierszy,
- df['nazwa_kolumny'].abs() - bezwzględne wartości numeryczne każdego elementu.

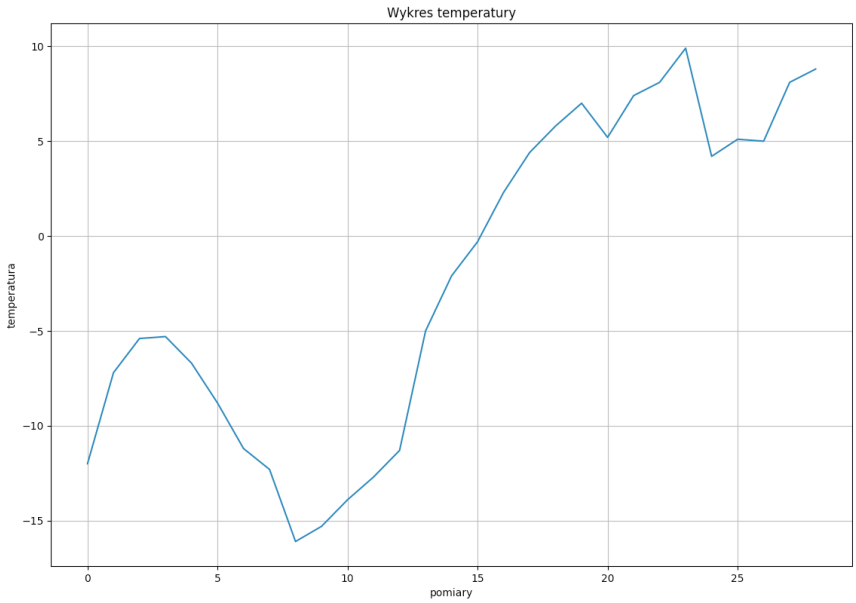
Umieśćmy zatem na wykresie pobrane z pliku wartości pomiarów temperatury, dopisując na końcu poprzedniego programu następujący kod:

```
fig, ax = plt.subplots()
ax.plot(df.index, df["Temperatura"])
ax.set(xlabel='pomiary', ylabel='temperatura', title='Wykres
    temperatury')
ax.grid()

plt.show()
```

Listing 8.10: Wykres temperatury z pliku .CSV

W efekcie otrzymamy wykres liniowy, gdzie oś x oznacza próbki pomiarów (w rzeczywistości index obiektu DataFrame), zaś na osi y zostanie umieszczony wykres wartości. Jak widać na rysunku 8.4, wykres wygenerował się poprawnie. Jednakże można zauważyć istotny problemem na osi x, na której nie widnieje data pomiaru.

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.



Rysunek 8.4: Wynik działania programu

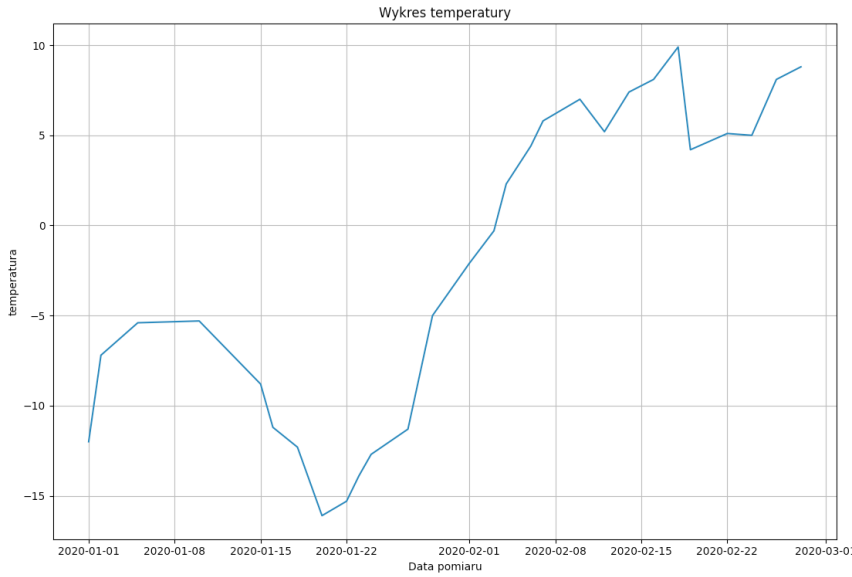
Warto zatem wykorzystać dodatkową kolumnę 'Data' w pliku, która wskazuje na konkretną datę, w której dokonano pomiaru. Wystarczy lekko zmodyfikować program, aby data była widoczna na wykresie. Dodatkowo, aby ulepszyć wykres, skorzystamy z funkcji **scatter()**, która doda na wykresie punkty pomiarowe na współrzędnych x, y.

```
fig, ax = plt.subplots()

ax.plot(df["Data pomiaru"], df["Temperatura"])
ax.set(xlabel='Data pomiaru', ylabel='temperatura', title='
    Wykres temperatury')
ax.grid()
plt.scatter(df["Data pomiaru"], df["Temperatura"])

plt.show()
```

Listing 8.11: Wykres temperatury z pliku .CSV z datą pomiaru

Od tego momentu wykres będzie zawierał oś x z naniesionymi datami poszczególnych pomiarów. Jak widać pakiet pakiet Pandas i Matplotlib pozwala na proste tworzenie wykresów.

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.



Rysunek 8.5: Wynik działania programu

Przykład - analiza porównawcza ocen uczniów z różnych szkół

Teraz zajmiemy się bardziej zaawansowaną analizą, której celem będzie odczyt danych z pliku tekstowego .CSV i wyświetlenie na wykresie porównania ocen, zdobytych przez uczniów z różnych szkół. Plik zawiera oceny uczniów z różnych przedmiotów. Analiza będzie polegać na obliczeniu wartości średniej ocen i wyświetlenie ich na wykresie jako porównanie wyników dla różnych szkół. Dzięki temu, będziemy w stanie porównać wyniki uczniów ze wszystkich szkół. Poniżej znajduje się przykładowy format pliku, w którym przechowywane są wyniki ocen.

```
szkola,nazwa,matematyka,polski,fizyka
PSP1,Jan Kowalski,5,4,3
PSP1,Krystian Nowak,4,2,4
...
PSP4,Piotr Mazur,4,4,4
PSP4,Paweł Dąbrowski,5,5,5
PSP4,Krzysztof Szymański,4,4,3
```

Jak widać plik zawiera nagłówek, który jest informacją o kolumnach, z których wynika, że oceny końcowe dotyczą przedmiotów z matematyki,

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

języka polskiego oraz fizyki, zaś pierwsza kolumna jest oznaczeniem szkoły, do której uczęszczał uczeń.

```
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt

df = pd.read$\_$csv('school.csv', delimiter=',')

matma = df.groupby('szkola').agg(Średnia = ('matematyka', '
    mean'), Najwyższa = ('matematyka', 'max'), Minimum = ('
    matematyka','min'))
matma.plot(kind = 'bar', color=['r', 'g', 'b'], figsize =
    (10, 6))
plt.title('Podsumowanie z przedmiotu: matematyka', fontsize
    =18)
plt.ylabel('Ocena', fontsize=16)
plt.xlabel('Szkoły', fontsize=16)
plt.xticks(size = 14)
plt.yticks(size = 14)
plt.legend(fontsize=14, loc='upper center')
plt.show()

# Jeśli chcesz zapisać wykres do pliku, użyj metody savefig()
plt.savefig('matematyka.png')
```

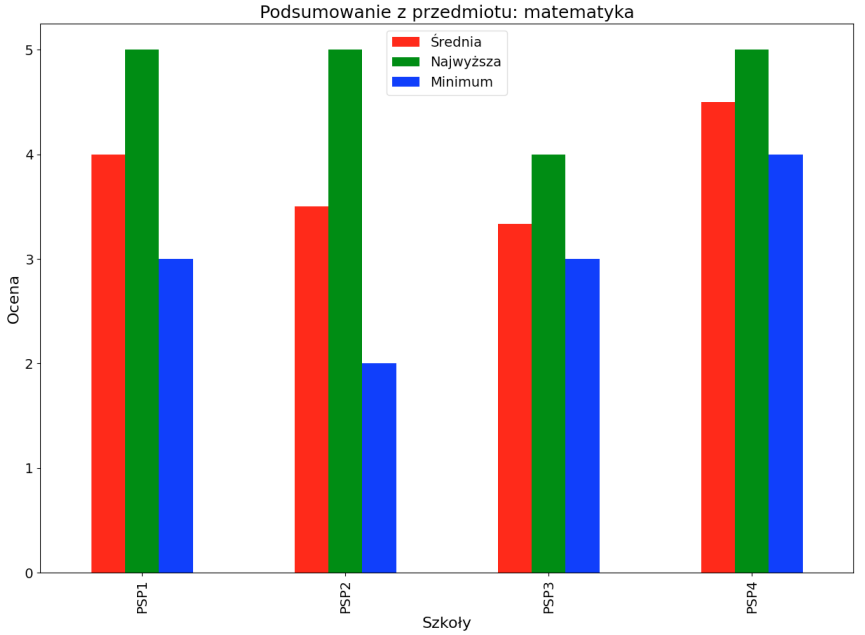
Listing 8.12: Porównanie ocen ze szkół

W programie generującym porównanie wyników ocen jest kilka nowych zapisów, które wymagają wyjaśnienia. Do tej pory używaliśmy domyślnych wartości odpowiedzialnych za rozmiar czcionki czy formatowanie wykresów. Teraz zatem je objaśnimy:

- **groupby()** - funkcja grupująca, która pozwala poznać oceny uczniów z podziałem na szkoły. Jako parametr przyjmuje nazwę kolumny, po której należy dokonać grupowania;
- **agg()** - wykonuje obliczenia dla każdej z grup. W tym przypadku wylicza dla każdej grupy średnią ocen oraz minimalną i maksymalną ocenę. Dodatkowo tego typu zapis umożliwia nadanie nazw dla każdej z kolumn, które są wykorzystane w wykresie;
- **plot()** - funkcja umieszcza na wykresie kolumny wraz z etykietami. Opcjonalnie podano także kolory poszczególnych belek wykresu przy pomocy tablicy ['r', 'g', 'b'], co oznacza: red, green, blue;
- **title()** - umieszcza tytuł wykresu. Choć jest to opcjonalne, ponieważ tytuł można podać bezpośrednio w funkcji plot(), to umieszczenie go w osobnej linii pozwala na czytelniejsze formatowanie czcionki;
- **xlabel()** - pozwala na zdefiniowanie etykiety osi x. Podobnie jak w przypadku tytułu, przeniesiono wywołanie funkcji do osobnej linii w celu zwiększenia czytelności programu i modyfikacji

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

czcionki;
- **ylabel()** - pozwala na zdefiniowanie etykiety osi y;
- **xtick()** - formatowanie wartości na osi x. W tym przypadku oznacza jedynie zmianę wielkości czcionki, jednak opcjonalnych argumentów jest o wiele więcej;
- **ytick()** - jak wyżej, lecz dotyczy formatowania wartości osi y;
- **legend()** - dotyczy legendy wyświetlanej nad wykresem. Matplotlib umieszcza legendę automatycznie, co czasami potrafi zaburzyć widok wykresu. W tej linii legenda została przeniesiona do górnej części wykresu i wycentrowana;
- **savefig()** - dotychczas w przykładowych programach wyświetlaliśmy wykres przy pomocy funkcji **show()**. Wykres można także zapisać na dysk podając jako argument jego nazwę oraz rozszerzenie pliku. Funkcja zapisze plik w formacie podanym w rozszerzeniu pliku.



Rysunek 8.6: Wynik działania programu

8.6 Podsumowanie

W rozdziale zostały opisane podstawy wykorzystania bibliotek dla języka Python, które umożliwiają analizę danych. Tematyka jest nie-

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

zwykle szeroka, stąd opisano jedynie podstawowe zastosowania narzędzi. Mam nadzieję, że zaprezentowane podstawy będą zachętą do zgłębienia tematu, ponieważ analiza danych jest współcześnie podstawą działalności wielu przedsiębiorstw. Dzięki zaawansowanej analizie danych biznesowych można zwiększyć przychody firmy, zoptymalizować marketing i pozyskać więcej klientów poprzez szybszą reakcję na trendy rynkowe, a tym samym uzyskać przewagę konkurencyjną. Coraz bardziej popularne jest również łączenie analizy danych z algorytmami sztucznej inteligencji i wykorzystywanie tego typu systemów w zakładach produkcyjnych.

Norway grants

Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).

Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

9. Czy można ograć kasyno?

Weronika Woś

9.1 Wstęp

Czy można ograć kasyno? Nałogowi gracze zastanawiają się nad tym problemem od dawna. Niestety, wszystkie gry w kasynie są tak skonstruowane, że to kasyno wygrywa. Wynika to z ujemnej wartości oczekiwanej gier z punktu widzenia klienta. Jednak w latach 60-tych XX wieku ukazało się kilka książek o tym, jak można, stosując odpowiednią strategię, uzyskać dodatnią wartość oczekiwaną grając w Blackjacka. To ogromnie spopularyzowało tę grę i paradoksalnie okazało się korzystne dla branży hazardowej. W tym rozdziale zostanie przedstawione dokładniej, jak ta strategia działa.

9.2 Zasady gry w blackjacka

Przedstawmy najpierw podstawowe zasady gry. W grze używa się kilku talii złożonych z 52 kart. Używa się ich od jednej aż do ośmiu. Standardowy zestaw kart do gry (talia) zawiera 52 karty w 4 kolorach:

- pik (wino),
- kier (czerwo, serce),
- trefl (żołądź, koniczyna),
- karo (dzwonek).

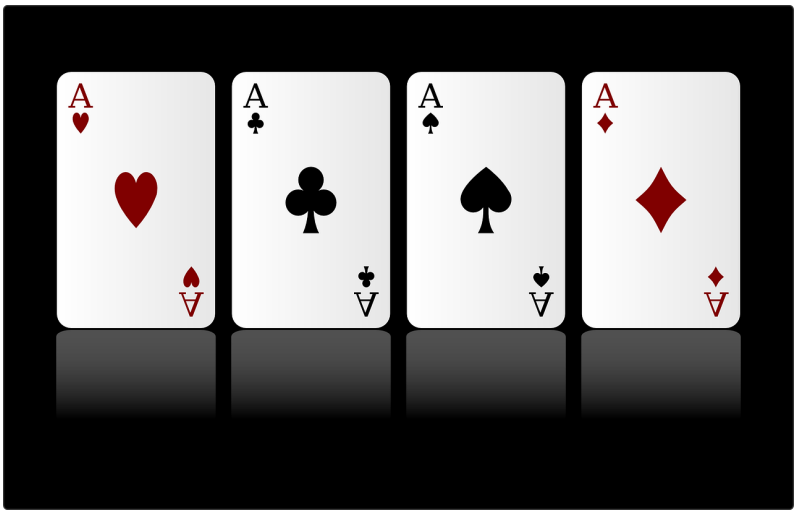
Każdy z kolorów posiada 9 kart numerowanych od 2 do 10, 3 figury:

Norway grants

Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).

Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

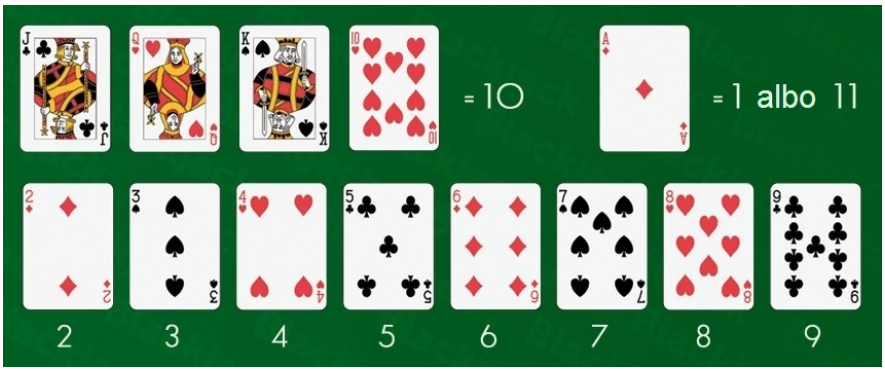
Waleta, Damę, oraz Króla, oraz dodatkową kartę, Asa. Daje to łącznie 13 kart jednego koloru.



Rysunek 9.1: Asy w kolorach od lewej: kier, trefl, pik oraz karo

Celem gry jest osiągnięcie jak największej liczby punktów, ale nie przekraczającej sumy 21, jednocześnie pokonując krupiera. Punktacja kart w blackjacku:

- karty od dwójki do dziesiątki mają wartość równą numerowi karty;
- walet, dama i król mają wartość równą 10 punktów;
- as ma wartość równą 1 lub 11, w zależności od tego co jest lepsze dla gracza.



Rysunek 9.2: Punktacja kart w blackjacku

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

Dwóch graczy dobiera karty tak długo, aż spasują. Wynik gracza to suma punktów z kart lub 0 w przypadku, gdy suma jest większa niż 21. Takie przekroczenie nazywamy "furą".

Jak gra przebiega w kasynie? Gra się przeciwko krupierowi. Na początku krupier odkrywa jedną swoją kartę. Potem gracz dobiera karty. Każdy gracz rozpoczyna partię z dwoma kartami, a jedna karta krupiera jest ukryta do końca gry. Można albo dobrać kartę (uderzać, "Hit"), albo spasować (stać, " Stand"), by wstrzymać dobieranie kart i zakończyć turę.

Rysunek 9.3: Gra blackjack jest jedną z wielu gier hazardowych w kasynie

Gdy gracz przekroczy 21, automatycznie przegrywa. Jeśli spasuje przed osiągnięciem 21 dobiera krupier, przy czym dobiera kolejną kartę wtedy i tylko wtedy, gdy ma 16 lub mniej punktów. Na koniec porównujemy wyniki gracza i krupiera (o ile ten drugi nie przekroczył 21, wtedy gracz wygrywa automatycznie). Wygrywa ten, kto ma więcej punktów, możliwy jest też remis. Specjalnie traktowany jest tzw. blackjack (BJ), czyli 21 złożone z dwóch kart (as z dziesiątką lub figurą).

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

9.3 Wartość oczekiwana

Wartość oczekiwana to wartość określająca spodziewany wynik doświadczenia losowego, przy założonym prawdopodobieństwie jego występowania. Na przykład w rzucie 100 razy monetą oczekujemy, że 50 razy wypadnie orzeł i 50 reszka. Jest to spodziewany średni wynik, co nie oznacza, że dokładnie taki uzyskamy w konkretnym doświadczeniu.

Definicja 9.1 — Wartość oczekiwana. Inaczej wartość średnia, wartość przeciętna, nadzieja matematyczna, pierwszy moment, esperancja. Jest to pojęcie z zakresu rachunku prawdopodobieństwa, najważniejsza charakterystyka liczbowa zmiennej losowej, oznaczana zwykle symbolem EX. Dla zmiennej losowej X przyjmującej wartości $x_1, x_2, \ldots, x_k$ z prawdopodobieństwami odpowiednio $p_1, p_2, \ldots, p_k$ jest to liczba równa

$$EX = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_kp_k.$$

Twierdzenie 9.1 Dla zmiennej losowej X, przyjmującej nieskończenie wiele różnych wartości, mającej rozkład prawdopodobieństwa o gęstości $p(x)$, wartością oczekiwaną nazywa się liczbę

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x\, p(x)\, \mathrm{d}x.$$

Jednak w tak ogólnym przypadku może się okazać, że wartość oczekiwana nie istnieje.

Ćwiczenie 9.1 Rzucamy kostką sześcienną. Jeżeli wypadnie 1 lub 2 to wygrywamy 12 zł. Jeżeli wypadnie 3 lub 4 to wygrywamy 6 zł. Jeżeli natomiast wypadnie 5 lub 6 to przegrywamy 9 zł. Obliczyć wartość oczekiwaną wygranej w tej grze.

Rozwiązanie
Dla ułatwienia wartości zmiennej wygranych (przegranych) x_k i jej prawdopodobieństwa p_k będą zawarte w Tablicy 9.1.

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

x_k	p_k	$x_k\,p_k$
$+12$ zł	$1/3$	$+4$ zł
$+6$ zł	$1/3$	$+2$ zł
-9 zł	$1/3$	-3 zł
		$+3$ zł

Tablica 9.1: Rachunki

Zatem wartość oczekiwana tego zdarzenia losowego wynosi

$$EX = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 = +3\,\text{zł}.$$

■

Jak zostało wspomniane we wstępie, wszystkie gry w kasynie są tak skonstruowane, że mają ujemną wartość oczekiwaną z punktu widzenia klienta. Oznacza to, że uwzględniając wszystkie rozgrywki, jakie mają miejsce w salonie gry, średni wynik jest dodatni dla kasyna.

Rysunek 9.4: Krupier (a tym samym kasyno) ma zawsze przewagę nad graczem

Przypomnijmy, że krupier gra prostą strategią polegającą na tym, że dobiera kolejną kartę wtedy i tylko wtedy, gdy ma 16 lub mniej

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

punktów. Grając taką samą strategią jak krupier, gracz w każdej grze ma wartość oczekiwaną około $-6\,\%$, tzn. za każde postawione 100 złotych traci średnio 6 złotych w jednej grze. Kasyno wygrywa również w sytuacji, gdy obaj gracze przekroczą 21 (gdy gracz przekroczy, to krupier nawet nie odkrywa swoich kart).

9.4 Strategia

Zastanówmy się zatem, jak można tę przewagę kasyna zredukować. Pierwszym pomysłem jest zastosowanie innej strategii prostej. Możemy np. dociągać karty, aż osiągniemy jakąś założoną wcześniej liczbę punktów, np. 15. W ten sposób nie da się jednak zniwelować przewagi kasyna, można ją co najwyżej powiększyć. Ze strategii prostych najlepszą jest ta, którą stosuje krupier.

Spróbujmy wykorzystać fakt, że krupier odsłania swoją pierwszą kartę. Wpływ tej karty na wynik krupiera obrazuje Tablica 9.2. Pierwsza kolumna tabeli zawiera pierwszą kartę krupiera, a reszta są to prawdopodobieństwa osiągnięcia przez krupiera danego wyniku.

Karta	17	18	19	20	21	**BJ**	**Fura**
A	0,13	0,13	0,13	0,13	0,05	0,31	0,12
2	0,14	0,13	0,13	0,12	0,12	0	0,35
3	0,14	0,13	0,13	0,12	0,11	0	0,37
4	0,13	0,13	0,12	0,12	0,11	0	0,39
5	0,12	0,12	0,12	0,11	0,11	0	0,42
6	0,17	0,11	0,11	0,1	0,1	0	0,42
7	0,37	0,14	0,08	0,08	0,07	0	0,26
8	0,13	0,36	0,13	0,07	0,07	0	0,24
9	0,12	0,12	0,35	0,12	0,06	0	0,23
10	0,11	0,11	0,11	0,34	0,03	0,08	0,21

Tablica 9.2: Prawdopodobieństwa osiągnięcia danego wyniku przez krupiera

Widzimy, że gdy krupier ma kartę o niskiej wartości, tzn. 3, 4, 5 lub 6, to ma on duże prawdopodobieństwo fury. Wynika to stąd, że w talii występuje najwięcej kart o wartości 10 (figury i dziesiątki), więc na przykład z 6 często otrzymamy 16, a stąd z kolei już tylko mały krok do przekroczenia 21.

Nasza strategia będzie polegać na tym, że gdy krupier z dużym prawdopodobieństwem przekroczy 21 (to znaczy jeżeli pierwszą kartą

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

krupiera będzie 2, 3, 4, 5, 6, lub 7) to będziemy wtedy pasować jak najszybciej. W przeciwnym przypadku będziemy stosowali strategię krupiera.

Tabela 9.3 pokazuje, przy jakim aktualnym wyniku należy pasować. Na przykład, jeżeli pierwszą kartą krupiera jest 2, to liczba 14 w kolumnie obok oznacza, że dobieramy karty aż do uzyskania wyniku co najmniej 14 punktów, a następnie pasujemy.

Karta	**Strategia**
A	17
2	14
3	13
4	13
5	12
6	12
7	17
8	17
9	17
10	17

Tablica 9.3: Strategia prosta

Opisany wyżej sposób postępowania jest to tzw. **strategia podstawowa**. Gdy gramy według tego scenariusza to przewaga kasyna spada do około $-0,5\%$. To znaczy, że pomniejszyliśmy przewagę kasyna dwunastokrotnie! Jednak nadal wartość oczekiwana jest ujemna z punktu widzenia gracza.

9.5 Modyfikacja strategii

Strategia podstawowa znacznie zmniejszyła uprzywilejowaną pozycję kasyna. To nas jednak jeszcze nie zadowala. Chcielibyśmy osiągnąć sytuację w której to gracz, a nie kasyno, będzie miał przewagę. Celem jest, aby gra miała dodatnią wartość oczekiwaną z punktu widzenia klienta.

Jak to zrobić? Otóż wykorzystamy fakt, że w rzeczywistości nie jest tak, że każde rozdanie rozgrywane jest od nowa przetasowaną talią. Kolejne rozdanie odbywa się kartami, które nie zostały użyte w poprzednim. Bardzo uważny obserwator może zatem zapamiętać, jakie karty zostały w talii. Na tej podstawie można zmodyfikować strategię.

Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Norway grants
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

■ **Przykład 9.1** Powiedzmy, że w talii pozostały w dużej większości karty o wartości 10. Wówczas, gdy odkrytą kartą krupiera jest 2, 3, 4, 5 lub 6 to mamy niemal pewność, że będzie miał on furę (gdyż może dobrać praktycznie tylko 10, a poniżej 17 się nie zatrzyma). W takim przypadku będziemy tylko unikać przekroczenia i wygrywać z dużą pewnością. ■

Klasycznie w blackjacku używa się aż do ośmiu talii kart, czyli $8 \cdot 52 = 416$ kart. W związku z tym zapamiętanie dokładnie, jakie karty zostały już wykorzystane jest niemożliwe. Stosuje się uproszczone metody obliczania tego, jak dobra jest dana talia dla gracza w danym momencie.

Najprostszy stosowany sposób to:

- 2, 3, 4, 5, 6 mają wartość $+1$;
- 7, 8, 9 mają wartość 0;
- 10, As i figury mają wartość -1.

Przez całą grę sumujemy wartości dla wszystkich wykorzystanych kart, otrzymując tzw. **wartość bieżącą**. Im jest ona większa, tym bardziej opłacalna dla nas staje się gra. Już przy wartości $+2$ gracz uzyskuje przewagę nad kasynem.

Rysunek 9.5: Kadr z filmu "21"

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

Ten mechanizm został przedstawiony w filmie "21" z 2008 roku, jednak bez żadnych szczegółów. Jest to oparta na faktach opowieść o błyskotliwych studentach prestiżowej amerykańskiej uczelni MIT, którzy podbili kasyna Las Vegas wygrywając miliony dolarów. Główny bohater filmu to inteligentny, choć nieśmiały student. Musi zapłacić 300 tysięcy dolarów czesnego i pomagają mu w tym karty. Dołącza bowiem do grupy najlepszych studentów, którzy w każdy weekend jeżdżą do Las Vegas grać w blackjacka. Ich mentorem i opiekunem jest profesor matematyki, który opracował metodę liczenia kart pozwalającą wygrać z kasynem. Łatwe pieniądze są w zasięgu ręki. Ale pomimo, że liczenie kart nie jest nielegalne, stawka idzie o tak duże sumy, że graczami interesuje się szef ochrony kasyna.

Duża **wartość bieżąca** oznacza, iż w talii pozostało sporo kart o wartości 10 i zwiększa się prawdopodobieństwo tego, że krupier będzie miał furę. Gdy wartość bieżąca jest ujemna to wtedy gramy na małe stawki, a gdy jest istotnie dodatnia, to wtedy podnosimy stawkę. To znaczy gramy kolejne gry np. o 100 złotych zamiast o 1 złoty. Odpowiednio manewrując stawkami, możemy wreszcie osiągnąć upragnioną przewagę.

Rysunek 9.6: Chęć szybkiego wzbogacenia się to główny powód grania w blackjacka.

Rewelacja! Jutro możemy zatem iść do kasyna i zacząć wygrywać miliony! Niestety, nie do końca. Aby nauczyć się sprawnego liczenia

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

kart oraz zmieniających się strategii potrzeba zdolności szybkiego liczenia oraz dużo pracy. Poza tym kasyna zaczęły się bronić przed klientami wprowadzając maszyny do tasowania po każdym rozdaniu.

Norway grants

Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).

Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

10. Kwantowa przyszłość obliczeń

Andrzej Chmielowiec

10.1 Wstęp

Pomysł stworzenia komputera kwantowego przedstawił w 1982 roku laureat Nagrody Nobla, znany fizyk Richard Feynman. W swoich rozważaniach badał on problem symulacji zachowania R cząstek. Okazuje się, że złożoność modeli klasycznych rośnie wielomianowo względem liczby cząstek R. Natomiast złożoność modeli kwantowych rośnie już wykładniczo. Ten ogromny przeskok złożoności powoduje, że symulacje kwantowe są w zasadzie nie realizowalne dla większej liczby cząstek w klasycznym modelu obliczeń – czyli takim, który zakłada, że bity w każdej chwili czasu mają ściśle określoną wartość. Ideę zaproponowaną przez Feynmana rozwinął David Deutsch, który zdefiniował podwaliny obliczeń kwantowych i wprowadził model tak zwanej *kwantowej maszyny Turinga*.

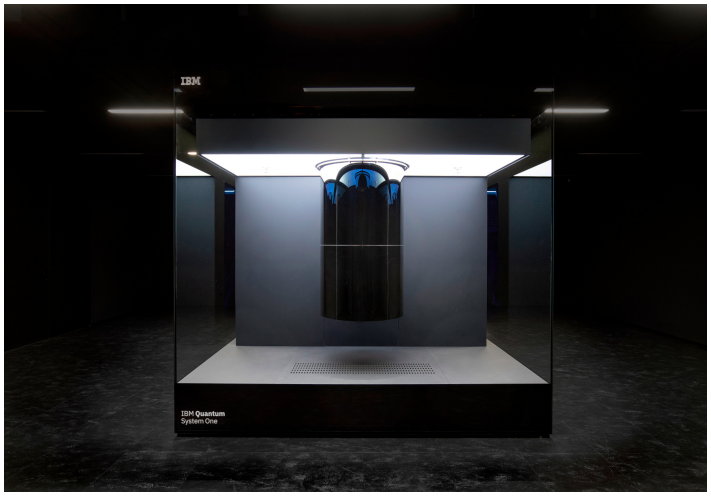
Propozycje Feynmana i Deutscha nie spotkały się ze zbyt wielkim zainteresowaniem naukowców. Zwrot w podejściu do obliczeń kwantowych nastąpił w roku 1994, kiedy Peter Shor opublikował kwantowy algorytm faktoryzacji. Odkrycie to skutecznie łamało zarówno algorytm RSA, jak i protokół Diffiego-Hellmana. Problemem był jedynie brak komputera kwantowego. W związku z tym od połowy lat 90-tych XX wieku trwają intensywne prace nad stworzeniem takiej maszyny. Te, które funkcjonują w laboratoriach potrafią przetwarzać kilkadzie-

Norway grants

Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).

Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

siąt bitów kwantowych. To jednak wciąż zbyt mało, aby skutecznie faktoryzować liczby użyte w konstrukcji szyfrów. Rok 2019 był w pewnym sensie przełomowy pod tym względem. Wtedy bowiem firma IBM wprowadziła na rynek pierwszy komputer kwantowy, który był dostępny na zasadach rynkowych. Komputer ma rozmiary niewielkiego pokoju, a jego koszt sięga 20 milionów dolarów. W celu zapewnienia stabilności stanów kwantowych komputer utrzymuje swoje podzespoły obliczeniowe w ekstremalnie niskiej temperaturze. Jest ona bardzo bliska temperatury zera absolutnego, co sprawia, że komputer musi mieć tak pokaźne rozmiary.



Rysunek 10.1: Pierwszy komputer kwantowy sprzedawany seryjnie przez firmę IBM [źródło: Wikipedia]

Aktualnie na świecie prowadzonych jest bardzo wiele pilotażowych projektów, w ramach których badana jest możliwość wykorzystania różnych efektów kwantowych do budowy komputera. Dużo wysiłków wkładana się między innymi w prace mające zweryfikować możliwość prowadzenia obliczeń w wyższych temperaturach.

10.2 Teoretyczne podstawy informatyki kwantowej

Podstawą przetwarzania informacji w komputerze kwantowym są tak zwane qbity. Ich zasadniczą cechą jest to, że poza stanami 0 i 1 potrafią również przechowywać stany pośrednie. To znaczy stany, w których qbit jest trochę zerem, a trochę jedynką. Poniżej definicja bitu kwantowego.

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

Definicja 10.1 — Bit kwantowy (qbit). Bitem kwantowym nazywamy system kwantowy posiadający dwa poziomy (stopnie swobody). Z matematycznego punktu widzenia często utożsamia się go z dwuwymiarową przestrzenią Hilberta H_2, która posiada dwuelementową bazę $B = \{|0\rangle, |1\rangle\}$. Elementy bazy zapisujemy w formie wektorowej jako

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Stan bitu kwantowego reprezentowany jest przez wektor

$$\alpha_0 |0\rangle + \alpha_1 |1\rangle,$$

dla którego amplitudy α_i spełniają warunek $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 = 1$.

Pojawiająca się w definicji dwuwymiarowa przestrzeń Hilberta jest pojęciem dość ogólnym, niemniej jednak można przyjąć, że jest to dwuwymiarowa przestrzeń zespolona. Takie ograniczenie będzie w zupełności wystarczające na potrzeby naszych dalszych rozważań.

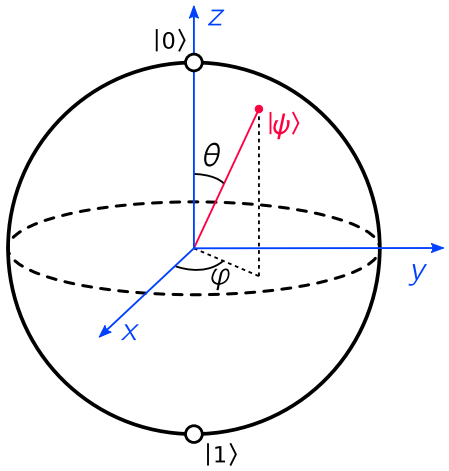
Widzimy zatem, że podstawowa jednostka informacji kwantowej – qbit, ma wartość nie do końca określoną. Mechanika kwantowa pokazuje nam jednak, że w momencie pomiaru stan kwantowy zawsze zostaje zdeterminowany do wartości $|0\rangle$ lub $|1\rangle$. Wynikiem pomiaru bitu kwantowego jest 0 z prawdopodobieństwem α_0^2 i 1 z prawdopodobieństwem α_1^2. Jeżeli zatem posiadamy 100 qbitów postaci $\alpha_0 |0\rangle + \alpha_1 |1\rangle$, to około $100 \cdot \alpha_0^2$ pomiarów da wartość 0, a $100 \cdot \alpha_1^2$ pomiarów da wartość 1.

■ **Przykład 10.1** Rozważmy zbiór 100 identycznych qbitów, których stan jest postaci $|\psi\rangle = 0.8 |0\rangle + 0.6 |1\rangle$. Jeżeli sprawdzimy wartości wszystkich qbitów z tego zbioru, to zaobserwujemy mniej więcej $100 \cdot (0.8)^4 = 64$ zera i $100 \cdot (0.6)^2 = 36$ jedynek. ■

Do reprezentowania stanu bitów kwantowych wykorzystywana jest najczęściej sfera Blocha pokazana na Rysunku 10.2. Ten sferyczny układ współrzędnych pozwala na przedstawienie dowolnego stanu kwantowego $|\psi\rangle$ w następującej postaci:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle + e^{i\varphi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle \\ &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle + (\cos\varphi + i \sin\varphi) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle. \end{aligned}$$

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.



Rysunek 10.2: Stan bitu kwantowego $|\psi\rangle$ reprezentowany za pomocą sfery Blocha

Definicja 10.2 — Bramka jednokrotna. Przekształcenie pojedynczego qbitu jest nazywane bramką jednokrotną, jeżeli jest ono zadane przez pewne przekształcenie unitarne $U : H_2 \to H_2$.

Przekształcenie liniowe $|0\rangle \mapsto \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle$, $|1\rangle \mapsto \gamma\,|0\rangle + \delta\,|1\rangle$ nazywamy unitarnym, jeżeli współczynniki spełniają warunek:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\gamma} \\ \bar{\beta} & \bar{\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

co zapisujemy również jako $UU^* = I$. Przy czym liczby $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$ i $\bar{\delta}$ oznaczają sprzężenia liczb α, β, γ i δ. Poniżej przedstawione zostały podstawowe przykłady jednobitowych bramek kwantowych.

■ **Przykład 10.2 — Bramka NOT (Pauli X).** Negacja qbitu zdefiniowana jest za pomocą następującego przekształcenia

$$X = M_\neg = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bramka ta odpowiada obrotowi o π wokół osi X i neguje qbity przekazywane jako argumenty:

$$X\,|0\rangle = |1\rangle\,,$$
$$X\,|1\rangle = |0\rangle\,.$$

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

Możliwe są też obroty wokół osi Y i Z:

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

■

■ **Przykład 10.3 — Bramka SQRT-NOT.** Okazuje się, że bramkę NOT można zrealizować za pomocą złożenia dwóch identycznych przekształceń unitarnych

$$\sqrt{X} = \sqrt{M_{\neg}} = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \\ \frac{1-i}{2} & \frac{1+i}{2} \end{pmatrix}.$$

Bramka ta przekształca qbity w następujący sposób:

$$\sqrt{X}\,|0\rangle = \frac{1+i}{2}\,|0\rangle + \frac{1-i}{2}\,|1\rangle\,,$$
$$\sqrt{X}\,|1\rangle = \frac{1-i}{2}\,|0\rangle + \frac{1+i}{2}\,|1\rangle\,.$$

■

■ **Przykład 10.4 — Bramka Hadamarda (H).** Bramka Hadamarda jest jedną z ważniejszych operacji na bitach kwantowych

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Bramka ta neguje qbity przekazywane jako argumenty:

$$H\,|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|1\rangle\,,$$
$$H\,|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\,|1\rangle\,.$$

Ważną własnością bramki H jest to, że jej dwukrotne złożenie daje identyczność:

$$H^2\,|0\rangle = |0\rangle\,, \quad H^2\,|1\rangle = |1\rangle\,.$$

■

Na samych przykładach bramek jednokrotnych widać już jak bardzo skomplikowany jest system obliczeń kwantowych. W przypadku bitów klasycznych istnieje tylko jedna nietrywialna bramka jednokrotna i jest nią bramka NOT. Dla bitów kwantowych mamy nieskończenie wiele

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

bramek jednokrotnych. Niemniej jednak w komputerze kwantowym może być zaimplementowana jedynie ich skończona liczba. Dlatego też w praktyce wykorzystuje się głównie te, które zostały przedstawione w powyższych przykładach.

Operacje na pojedynczych qbitach nie pozwalają jednak realizować skomplikowanych obliczeń. Aby było to możliwe konieczne jest wykorzystanie bramek, które posiadają przynajmniej dwa wejścia. Zanim do tego przejdziemy zobaczmy w jaki sposób od strony teoretycznej opisywane są układy dwóch bitów kwantowych. Zaczniemy od definicji dwubitowego rejestru kwantowego.

Definicja 10.3 — Dwubitowy rejestr kwantowy. System dwóch bitów kwantowych tworzy przestrzeń $H_4 = H_2 \otimes H_2$, gdzie $\otimes$ jest iloczynem tensorowym. Jeżeli $V_1 = \mathrm{Lin}(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}) = \{\alpha_1 \mathbf{x_1} + \alpha_2 \mathbf{x_2}\}$ i $V_2 = \mathrm{Lin}(\mathbf{y_1}, \mathbf{y_2}) = \{\beta_1 \mathbf{y_1} + \beta_2 \mathbf{y_1}\}$, to

$$V_1 \otimes V_2 = \mathrm{Lin}(\mathbf{x_1} \otimes \mathbf{y_1}, \mathbf{x_1} \otimes \mathbf{y_2}, \mathbf{x_2} \otimes \mathbf{y_1}, \mathbf{x_2} \otimes \mathbf{y_2}),$$

gdzie $\mathbf{x_i} \otimes \mathbf{y_j}$ są wektorami bazy iloczynu tensorowego V_1 i V_2 oznaczanymi przez $\mathbf{x_i y_j}$. Ponadto dla dowolnych wektorów $\mathbf{v_1} = \alpha_1 \mathbf{x_1} + \alpha_2 \mathbf{x_2}$, $\mathbf{v_2} = \beta_1 \mathbf{y_1} + \beta_2 \mathbf{y_2}$ mamy

$$\mathbf{v_1} \otimes \mathbf{v_2} = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j \mathbf{x_i y_j}.$$

Być może od strony formalnej wygląda to nieco skomplikowanie, ale tak naprawdę iloczyn tensorowy możemy traktować jak iloczyn przestrzeni, w którym każdy wektor z jednej przestrzeni mnożony jest przez każdy wektor z drugiej przestrzeni. Zobaczmy, jak w praktyce wygląda iloczyn tensorowy qbitów.

Definicja 10.4 — Iloczyn tensorowy qbitów.

$$|00\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

$$|01\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$|10\rangle = |1\rangle \otimes |0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$|11\rangle = |1\rangle \otimes |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Okazuje się, że nie wszystkie stany kwantowe mogą być iloczynem tensorowym dwóch innych stanów kwantowych. Dochodzimy tym sposobem do definicji splątania.

Definicja 10.5 — Stany rozkładalne i splątane. Jeżeli stan kwantowy $z \in H_4$ złożony z dwóch bitów kwantowych możemy zapisać jako iloczyn tensorowy stanów pojedynczych qbitów, to taki stan z nazywamy *rozkładalnym*. Jeżeli operacja taka jest niemożliwa, to taki stan nazywamy *splątanym*.

Poniżej przykłady stanu rozkładalnego i stanu splątanego.

■ **Przykład 10.5 — Stanu rozkładalny.** Aby wykazać, że stan jest rozkładalny wystarczy pokazać iloczyn tensorowy, który go generuje

$$\frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)\right] \otimes \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)\right].$$

■

■ **Przykład 10.6 — Stan splątany.** W przypadku stanów splątanych rozumowanie jest trochę bardziej skomplikowane. Należy bowiem wykazać, że nie istnieje iloczyn tensorowy, który dany stan generuje. W tym celu przyjmujemy założenie przeciwne i próbujemy zapisać stan

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

kwantowy jako iloczyn tensorowy

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) = \\ (\alpha_0 |0\rangle + \alpha_1 |1\rangle) \otimes (\beta_0 |0\rangle + \beta_1 |1\rangle) = \\ \alpha_0\beta_0 |00\rangle + \alpha_0\beta_1 |01\rangle + \alpha_1\beta_0 |10\rangle + \alpha_1\beta_1 |11\rangle .$$

Z powyższej zależności wynika następujący układ czterech równań: $\alpha_0\beta_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\alpha_1\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\alpha_0\beta_1 = 0$ i $\alpha_1\beta_0 = 0$. Jest to ewidentnie układ równań sprzecznych, gdyż iloczyn pierwszych dwóch równań daje zależność $\alpha_0\alpha_1\beta_0\beta_1 = \frac{1}{2}$, a iloczyn trzeciego i czwartego daje $\alpha_0\alpha_1\beta_0\beta_1 = 0$. ■

Splątane qbity są bardzo ciekawym zjawiskiem fizycznym. Okazuje się bowiem, że jeśli dwa qbity są w stanie splątanym $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$, to obserwacja jednego z nich może dać wartość 0, bądź 1 z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$. Nie jest jednak możliwe obserwowanie różnych wartości na tych qbitach (albo pomiar obu daje wartość 00, albo 11). Doświadczenia pokazały, że jest to prawdą także w przypadku qbitów odległych od siebie nawet o więcej niż 10 km. Hipoteza jest taka, że ta prawidłowość jest niezależna od odległości pomiędzy bitami kwantowymi.

Po tym, jak zdefiniowaliśmy dwubitowy rejestr kwantowy i omówiliśmy podstawowe pojęcia z nim związane możemy przejść do opisu bramek dwukrotnych.

Definicja 10.6 — Bramka dwukrotna. Jednoczesne przekształcenie dwóch qbitów jest nazywane bramką dwukrotną, jeżeli jest ono zadane przez pewne przekształcenie unitarne $U : H_4 \to H_4$, gdzie $H_4 = H_2 \otimes H_2$. Do zdefiniowania operacji na bramce dwukrotnej wykorzystujemy następującą reprezentację qbitów:

$$|00\rangle = (1,0,0,0)^T,$$
$$|01\rangle = (0,1,0,0)^T,$$
$$|10\rangle = (0,0,1,0)^T,$$
$$|11\rangle = (0,0,0,1)^T.$$

Poniżej przedstawiamy dwa przykłady bramek dwukrotnych.

■ **Przykład 10.7 — Bramka CNOT (cX).** Warunkowa negacja qbitu zde-

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

finiowana jest za pomocą następującego przekształcenia

$$cX = M_{\text{cnot}} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bramka ta neguje drugi qbit w zależności od wartości pierwszego:

$$\begin{aligned} cX\,|00\rangle &= |00\rangle\,, \\ cX\,|01\rangle &= |01\rangle\,, \\ cX\,|10\rangle &= |11\rangle\,, \\ cX\,|11\rangle &= |10\rangle\,. \end{aligned}$$

Analogicznie można zdefiniować bramki cY i cZ:

$$\begin{aligned} cY &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix}, \\ cZ &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & Z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

■

■ **Przykład 10.8 — Dwukrotna bramka Hadamarda (H).** Iloczyn tensorowy dwóch jednokrotnych bramek Hadamarda daje nam bramkę dwukrotną

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Jej działanie na dwu qbitowym argumencie wygląda następująco

$$\begin{aligned} H\,|q_0 q_1\rangle = \frac{1}{2}(&|00\rangle + (-1)^{q_1}\,|01\rangle + \\ &(-1)^{q_0}\,|10\rangle + (-1)^{q_0+q_1}\,|11\rangle). \end{aligned}$$

■

Jeżeli bramka dwukrotna jest iloczynem tensorowym dwóch bramek jednokrotnych, to wynik jej działania tworzy rozkładalny stan bitów (bramka Hadamarda). Jeżeli natomiast bramka dwukrotna nie może być reprezentowana jako iloczyn tensorowy bramek jednokrotnych, to jej działanie tworzy splątany stan bitów (bramka cX).

Bardzo ważną własnością bitów kwantowych jest brak możliwości ich kopiowania. Ta cecha stanowi podstawę kwantowego algorytmu uzgadniania kluczy kryptograficznych.

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

Twierdzenie 10.1 — Brak możliwości klonowania qbitów. Nie istnieje przekształcenie unitarne U takie, że dla dowolnego qbitu mamy:

$$U(|qa_1\rangle) = |qq\rangle\,.$$

Innymi słowy – nie ma możliwości skopiowania qbitu.

Niezależnie od braku możliwości kopiowania dowolnych stanów kwantowych należy podkreślić, że bez problemu możemy tworzyć kopie elementów bazy. Możemy zatem kopiować qbity $|0\rangle$ i $|1\rangle$.

10.3 Protokół kwantowej teleportacji

Obliczenia kwantowe kryją w sobie wiele nieoczywistych i nieintuicyjnych własności. Jedną z nich jest splątanie, które pozwala zrealizować protokół tak zwanej kwantowej teleportacji.

Załóżmy, że Alicja chce przesłać Bobowi qbit w stanie

$$a\,|0\rangle + b\,|1\rangle.$$

Dodatkowo będziemy zakładali, że obie strony dysponują po jednym qbicie ze stanu splątanego

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle),$$

przy czym Alicja posiada qbit lewy, a Bob posiada qbit prawy. W użyciu są zatem 3 qbity, których stan dany jest wzorem:

$$s_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(a\,|000\rangle + a\,|011\rangle + b\,|100\rangle + b\,|111\rangle).$$

Alicja stosuje bramkę cX na swoich bitach doprowadzając układ do stanu s_1

$$s_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(a\,|000\rangle + a\,|011\rangle + b\,|110\rangle + b\,|101\rangle).$$

Następnie Alicja stosuje bramkę H na pierwszym bicie (najbardziej

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

lewym) doprowadzając układ qbitów do stanu s_2

$$\begin{aligned} s_2 = &\frac{a}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)\,|00\rangle + \frac{a}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)\,|11\rangle + \\ &\frac{b}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)\,|10\rangle + \frac{b}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)\,|01\rangle \\ = &\frac{1}{2}|00\rangle(a\,|0\rangle + b\,|1\rangle) + \frac{1}{2}|01\rangle(a\,|1\rangle + b\,|0\rangle) + \\ &\frac{1}{2}|10\rangle(a\,|0\rangle - b\,|1\rangle) + \frac{1}{2}|11\rangle(a\,|1\rangle - b\,|0\rangle). \end{aligned}$$

Alicja sprawdza wartość bitów i wysyła wynik do Boba. Bob odbiera bity przesłane przez Alicję i stwierdza w jakim stanie jest jego qbit. Następnie dobiera taką sekwencję bramek, która pozwala na odtworzenie stanu kwantowego $a\,|0\rangle + b\,|1\rangle$.

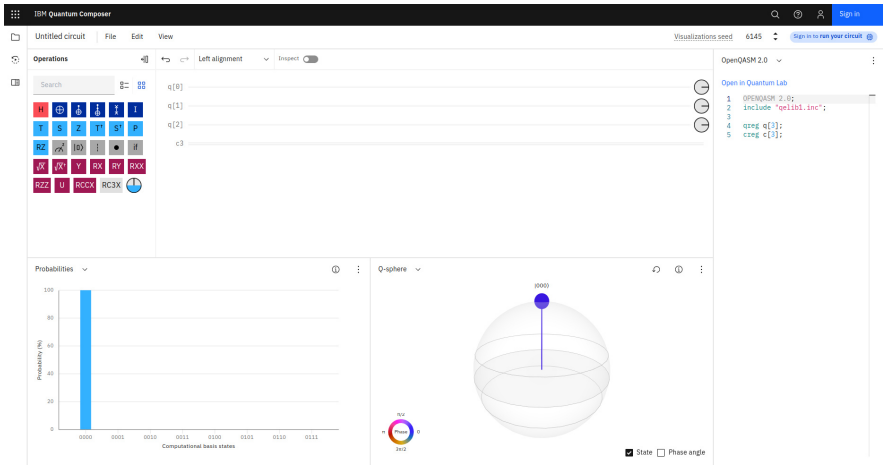
$$\begin{aligned} &00 \to s = a\,|0\rangle + b\,|1\rangle \to Is = a\,|0\rangle + b\,|1\rangle\,, \\ &01 \to s = a\,|1\rangle + b\,|0\rangle \to Xs = a\,|0\rangle + b\,|1\rangle\,, \\ &10 \to s = a\,|0\rangle - b\,|1\rangle \to Zs = a\,|0\rangle + b\,|1\rangle\,, \\ &11 \to s = a\,|1\rangle - b\,|0\rangle \to ZXs = a\,|0\rangle + b\,|1\rangle\,. \end{aligned}$$

10.4 Programowanie komputerów kwantowych

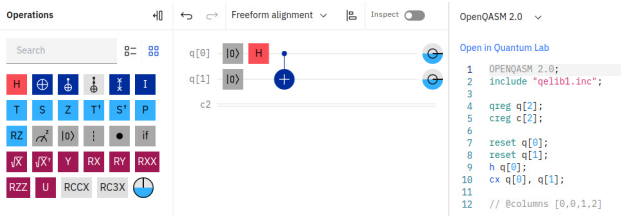
Mogłoby się wydawać, że skoro komputery kwantowe są tak drogimi urządzeniami, to tylko szczęśliwcy mogą mieć do nich dostęp. Od strony fizycznej faktycznie tak jest, ale zdalnie może to zrobić każdy. Firma IBM udostępnia bowiem część swoich komputerów kwantowych do obliczeń dla całej społeczności międzynarodowej. Za pomocą specjalnej aplikacji webowej można napisać program i mieć możliwość przeprowadzenia symulacji jego działania lub rzeczywistej realizacji na komputerze kwantowym. W tym drugim przypadku zadanie ustawiane jest w kolejce oczekujących, którzy chcą skorzystać z zasobów kwantowych firmy. Na Rysunku 10.3 przedstawiono zrzut ekranu z aplikacji webowej służącej do przygotowywania programów przeznaczonych dla komputerów kwantowych. Interfejs dostępny jest na stronach internetowych `https://quantum-computing.ibm.com/`. Zachęcamy czytelników do skorzystania z niego i napisania nawet najprostszego programu na komputer kwantowy.

Na Rysunku 10.4 przedstawiono fragment ekranu aplikacji, który ilustruje przykładowy program dla komputera kwantowego. Program wykorzystuje dwa qbity, a jego działanie polega na ich inicjacji stanem $|0\rangle$, wykorzystaniu bramki Hadamarda (H) i splątaniu za pomocą

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.



Rysunek 10.3: Ekran aplikacji webowej służącej do implementacji programów dla komputerów kwantowych

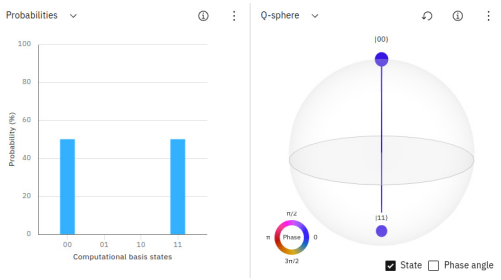


Rysunek 10.4: Fragment ekranu aplikacji webowej ilustrujący przykładowy program na komputer kwantowy

bramki CNOT (cX). Po lewej stronie panelu edycyjnego znajdują się instrukcje, które mogą zostać zrealizowane przez komputer kwantowy. Przenoszone są one do centralnej części edytora na zasadzie *przeciągnij i upuść*. Z kolei prawa część panelu przedstawia kod źródłowy programu w języku asembler dla komputerów kwantowych.

Na Rysunku 10.5 przedstawiono z kolei wynik działania stworzonego programu. Histogram umieszczony po lewej stronie ilustruje z jakim prawdopodobieństwem program da w wyniku swojego działania poszczególne ciągi bitów. Natomiast umieszczona po prawej stronie sfera Blocha pokazuje wyjściowy stan kwantowy z programu (przed wykonaniem pomiarów poszczególnych qbitów).

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.



Rysunek 10.5: Prawdopodobieństwa otrzymania konkretnych wyników obliczeń wraz z ilustracją wyjściowego stanu kwantowego na sferze Blocha

10.5 Podsumowanie

Systematycznie postępujące prace rozwojowe w dziedzinie konstrukcji komputerów kwantowych sprawiają, że prawdopodobnie już niebawem wejdą one do powszechnego użycia. Ich głównym zastosowaniem będą prawdopodobnie zagadnienia optymalizacyjne. Dlatego też warto interesować się tematyką komputerów i obliczeń kwantowych. Programowanie takich maszyn może stać się w przyszłości bardzo intratnym zajęciem. Pojęcia przedstawione w niniejszym rozdziale stanowią jedynie pobieżny wstęp do obliczeń kwantowych. Niemniej jednak pokazują, że tematyka ta jest niezwykle bogata i skomplikowana. Czytelników zainteresowanych przedstawionymi tutaj tematami zachęcamy do zgłębiania tajników obliczeń kwantowych. Bardzo przydatne pod tym względem są różnego rodzaju podręczniki i materiały udostępniane w internecie.

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

Projekt pt.: **„MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA - Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli"**, o wartości 15 328 498,86 zł, realizowany jest w ramach Programu Rozwój Lokalny. Projekt dofinansowany został ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz ze środków Budżetu Państwa (15%). Projekt ma na celu poprawę rozwoju lokalnego i instytucjonalnego Stalowej Woli. Projektem zarządza Lider – Gmina Stalowa Wola.

Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.
www.norwaygrants.pl i www.norwaygrants.org

Fundusze norweskie

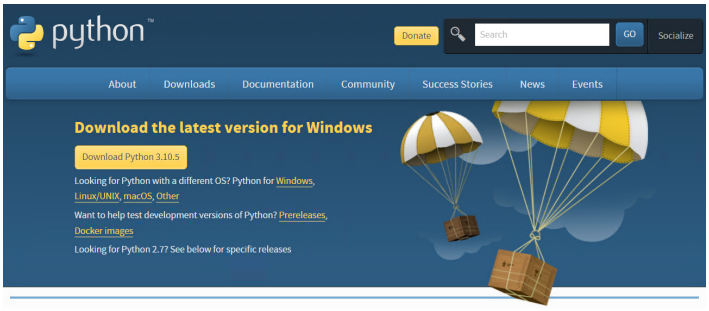
Fundusze norweskie reprezentują wkład Norwegii w tworzenie Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej. W ramach funduszy norweskich Norwegia przyczynia się do ograniczenia nierówności społecznych i ekonomicznych oraz wzmocnienia relacji dwustronnych z państwami beneficjentami z Europy Środkowej i Południowej oraz obszaru Morza Bałtyckiego. Norwegia ściśle współpracuje z UE w ramach Porozumienia o Europejskim Obszarze Gospodarczym (EOG). Wraz z pozostałymi darczyńcami, Norwegia przekazała 3,3 miliarda euro w ramach kolejnych programów funduszy w latach 1994–2014. Fundusze norweskie są finansowane wyłącznie przez Norwegię i dostępne w państwach, które przystąpiły do UE po 2003 r. Fundusze norweskie na lata 2014-2021 wynoszą 1,25 miliarda euro. Priorytety na ten okres to:

- innowacje, badania naukowe, edukacja, konkurencyjność i godna praca;
- integracja społeczna, zatrudnienie młodzieży i ograniczenie ubóstwa;
- środowisko, energia, zmiany klimatu i gospodarka niskoemisyjna;
- kultura, społeczeństwo obywatelskie, dobre zarządzanie i podstawowe prawa;
- sprawiedliwość i sprawy wewnętrzne.

A. Instrukcja instalacji oprogramowania Python

Leszek Klich

Aby zainstalować język Python w systemie Windows, należy odwiedzić stronę www.python.org. Następnie przejść do zakładki Downloads.



Rysunek A.1: Strona pobierania instalatora

Na rysunku A.1 widoczna jest strona pobierania instalatora, na której widnieje przycisk **Download Python 3.10.5** i jest to aktualna wersja języka. Następnie wystarczy uruchomić instalator. Podczas instalacji należy zaznaczyć opcję Dodaj Python 3.x do PATH (rysunek A.2) i kliknąć **Install Now**.

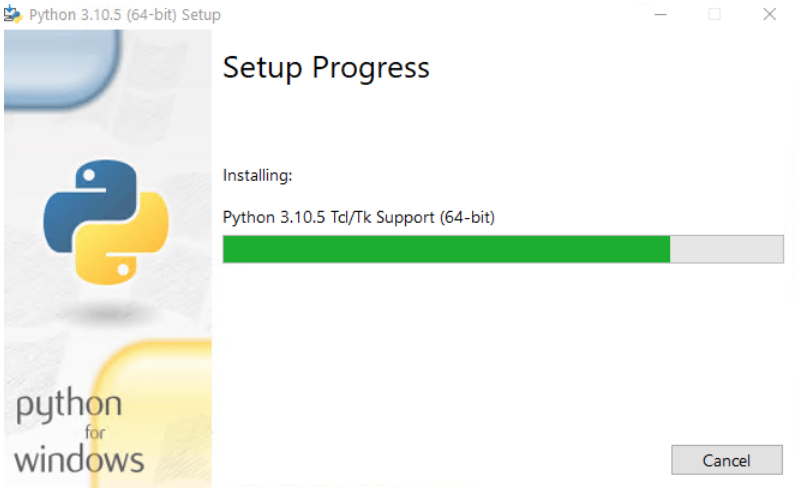
Norway grants

Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).

Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

Rysunek A.2: Uruchomiony instalator języka Python

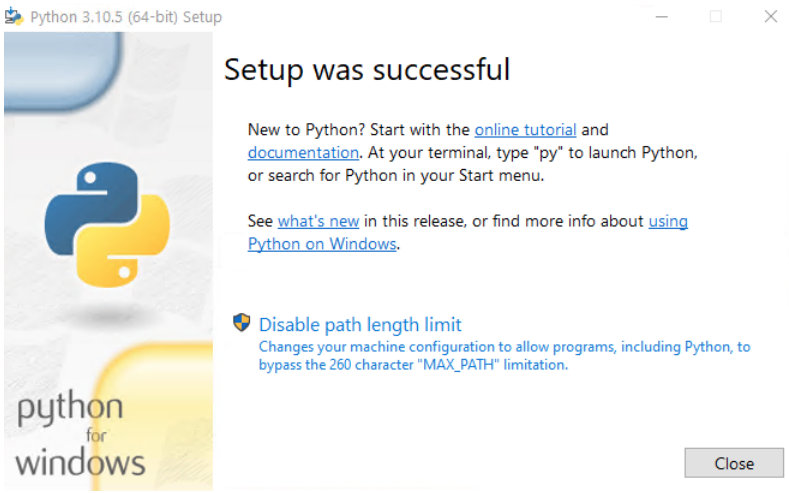
Teraz nastąpi kopiowanie plików oraz ustawienie zmiennych środowiskowych (A.3).



Rysunek A.3: Proces instalacji w systemie Windows

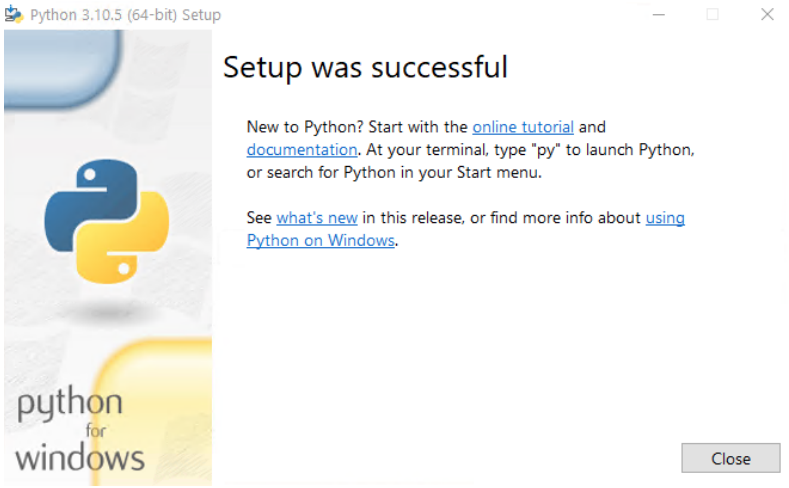
Na koniec instalator wyświetli podsumowanie i zaproponuje wyłącznie limitów rozmiaru ścieżki (rysunek A.4). Należy kliknąć opcję **Disable path length limit**.

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.



Rysunek A.4: Końcowa faza instalacji w systemie Windows

Po tych czynnościach etap instalacji języka Python jest zakończony, co zostanie podsumowane końcowym ekranem instalatora (rysunek A.5).



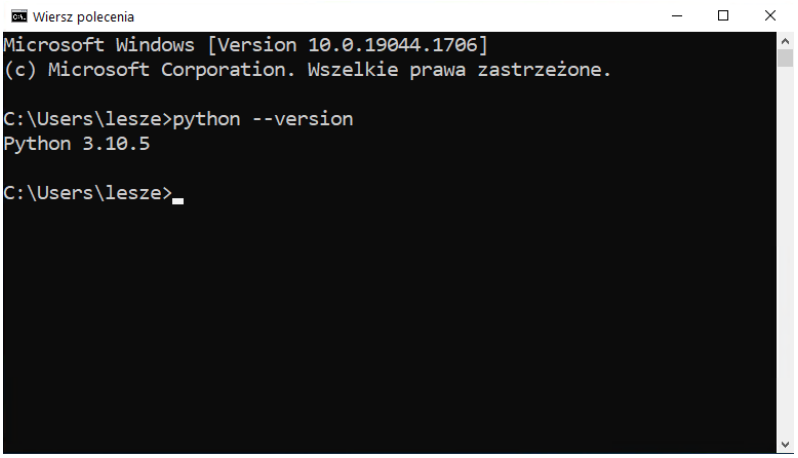
Rysunek A.5: Instalacja zakończona sukcesem

Aby zakończyć działanie instalatora, wciśnij przycisk **Close**.

Upewnij się, że interpreter języka Python został zainstalowany poprawnie i uruchom konsolę. Aby tego dokonać, w linii wyszukiwania wpisz **cmd** i uruchom **Wiersz polecenia**. Następnie wpisz python –

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

–version <Enter>, co powinno wyświetlić zainstalowaną wersję języka Python (3.10.5) jak na rysunku A.6



Rysunek A.6: Wiersz polecenia wyświetla zainstalowaną wersję Pythona

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.