# XV Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody drugiego stopnia

(11 stycznia 2020 r.)

Matematyczna Olimpiada Juniorów www.omj.edu.pl

**1.** Dane są liczby rzeczywiste $a$, $b$, $c$. Wiadomo, że liczby $a+b$, $b+c$, $c+a$ są trzema kolejnymi liczbami całkowitymi, wypisanymi w pewnej kolejności, przy czym najmniejsza z nich jest nieparzysta. Wykaż, że liczby $a$, $b$, $c$ są także trzema kolejnymi liczbami całkowitymi, wypisanymi w pewnej kolejności.

**2.** Dany jest równoległobok $ABCD$, w którym kąt przy wierzchołku $A$ jest ostry. Symetralna odcinka $AB$ przecina odcinek $CD$ w punkcie $X$. Przekątne tego równoległoboku przecinają się w punkcie $E$. Udowodnij, że $XE=\frac{1}{2}AD$.

**3.** W pewnym turnieju wzięli udział chłopcy i dziewczęta. Każda osoba rozegrała dokładnie jeden mecz z każdą inną osobą, nie było remisów. Po turnieju okazało się, że każdy przegrał co najmniej raz. Ponadto każdy chłopiec przegrał inną liczbę meczów niż każdy z pozostałych chłopców. Wykaż, że pewna dziewczynka wygrała mecz z pewnym chłopcem.

**4.** Dany jest trójkąt $ABC$, w którym miara kąta przy wierzchołku $A$ jest równa $45°$, a kąt przy wierzchołku $C$ jest rozwarty. Udowodnij, że

$$BC+(\sqrt{2}-1)\cdot CA<AB\,.$$

**5.** Dane są dodatnie liczby całkowite $a$, $b$ o następującej własności: dla każdej liczby naturalnej $n\geqslant 1$ ułamek

$$\frac{a+n}{b+n}$$

jest skracalny. Wykaż, że $a=b$.

---

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Fundacja

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej

Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku