



9. Czy można ograć kasyno?

Weronika Woś

9.1 Wstęp

Czy można ograć kasyno? Nałogowi gracze zastanawiają się nad tym problemem od dawna. Niestety, wszystkie gry w kasynie są tak skonstruowane, że to kasyno wygrywa. Wynika to z ujemnej wartości oczekiwanej gier z punktu widzenia klienta. Jednak w latach 60-tych XX wieku ukazało się kilka książek o tym, jak można, stosując odpowiednią strategię, uzyskać dodatnią wartość oczekiwaną grając w Blackjacka. To ogromnie spopularyzowało tę grę i paradoksalnie okazało się korzystne dla branży hazardowej. W tym rozdziale zostanie przedstawione dokładnie, jak ta strategia działa.

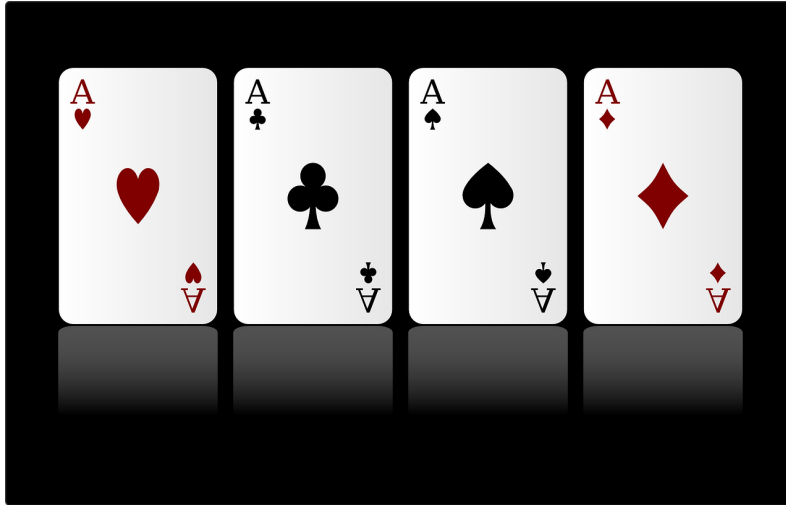
9.2 Zasady gry w blackjacka

Przedstawmy najpierw podstawowe zasady gry. W grze używa się kilku talii złożonych z 52 kart. Używa się ich od jednej aż do ośmiu. Standardowy zestaw kart do gry (talia) zawiera 52 karty w 4 kolorach:

- pik (wino),
- kier (czerwo, serce),
- trefl (żołędź, koniczyna),
- karo (dzwonek).

Każdy z kolorów posiada 9 kart numerowanych od 2 do 10, 3 figury:

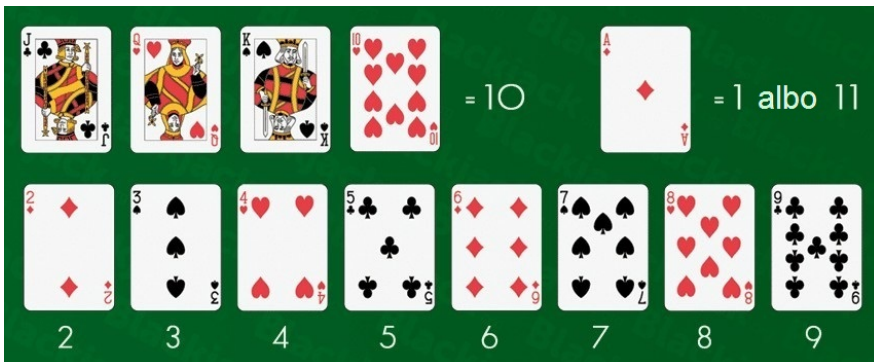
Waleta, Dame, oraz Króla, oraz dodatkową kartę, Asa. Daje to łącznie 13 kart jednego koloru.



Rysunek 9.1: Asy w kolorach od lewej: kier, trefl, pik oraz karo

Celem gry jest osiągnięcie jak największej liczby punktów, ale nie przekraczającej sumy 21, jednocześnie pokonując krupiera. Punktacja kart w blackjacku:

- karty od dwójki do dziesiątki mają wartość równą numerowi karty;
- walet, dama i król mają wartość równą 10 punktów;
- as ma wartość równą 1 lub 11, w zależności od tego co jest lepsze dla gracza.



Rysunek 9.2: Punktacja kart w blackjacku

Dwóch graczy dobiera karty tak długo, aż spասują. Wynik gracza to suma punktów z kart lub 0 w przypadku, gdy suma jest większa niż 21. Takie przekroczenie nazywamy "fura".

Jak gra przebiega w kasynie? Gra się przeciwko krupierowi. Na początku krupier odkrywa jedną swoją kartę. Potem gracz dobiera karty. Każdy gracz rozpoczyna partię z dwoma kartami, a jedna karta krupiera jest ukryta do końca gry. Można albo dobrać kartę (uderzać, "Hit"), albo spասować (stać, "Stand"), by wstrzymać dobieranie kart i zakończyć turę.



Rysunek 9.3: Gra blackjack jest jedną z wielu gier hazardowych w kasynie

Gdy gracz przekroczy 21, automatycznie przegrywa. Jeśli spասuje przed osiągnięciem 21 dobiera krupier, przy czym dobiera kolejną kartę wtedy i tylko wtedy, gdy ma 16 lub mniej punktów. Na koniec porównujemy wyniki gracza i krupiera (o ile ten drugi nie przekroczył 21, wtedy gracz wygrywa automatycznie). Wygrywa ten, kto ma więcej punktów, możliwy jest też remis. Specjalnie traktowany jest tzw. blackjack (BJ), czyli 21 złożone z dwóch kart (as z dziesiątką lub figurą).

9.3 Wartość oczekiwana

Wartość oczekiwana to wartość określająca spodziewany wynik doświadczenia losowego, przy założonym prawdopodobieństwie jego występowania. Na przykład w rzucie 100 razy monetą oczekujemy, że 50 razy wypadnie orzeł i 50 reszka. Jest to spodziewany średni wynik, co nie oznacza, że dokładnie taki uzyskamy w konkretnym doświadczeniu.

Definicja 9.1 — Wartość oczekiwana. Inaczej wartość średnia, wartość przeciętna, nadzieja matematyczna, pierwszy moment, esperancja. Jest to pojęcie z zakresu rachunku prawdopodobieństwa, najważniejsza charakterystyka liczbowa zmiennej losowej, oznaczana zwykle symbolem EX . Dla zmiennej losowej X przyjmującej wartości x_1, x_2, \dots, x_k z prawdopodobieństwami odpowiednio p_1, p_2, \dots, p_k jest to liczba równa

$$EX = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_kp_k.$$

Twierdzenie 9.1 Dla zmiennej losowej X , przyjmującej nieskończenie wiele różnych wartości, mającej rozkład prawdopodobieństwa o gęstości $p(x)$, wartością oczekiwaną nazywa się liczbę

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx.$$

Jednak w tak ogólnym przypadku może się okazać, że wartość oczekiwana nie istnieje.

Ćwiczenie 9.1 Rzucamy kostką sześcienną. Jeżeli wypadnie 1 lub 2 to wygrywamy 12 zł. Jeżeli wypadnie 3 lub 4 to wygrywamy 6 zł. Jeżeli natomiast wypadnie 5 lub 6 to przegrywamy 9 zł. Obliczyć wartość oczekiwaną wygranej w tej grze.

Rozwiązanie

Dla ułatwienia wartości zmiennej wygranych (przegryanych) x_k i jej prawdopodobieństwa p_k będą zawarte w Tabelicy 9.1.

x_k	p_k	$x_k p_k$
+12 zł	1/3	+4 zł
+6 zł	1/3	+2 zł
-9 zł	1/3	-3 zł
		+3 zł

Tablica 9.1: Rachunki

Zatem wartość oczekiwana tego zdarzenia losowego wynosi

$$EX = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 = +3 \text{ zł.}$$

Jak zostało wspomniane we wstępie, wszystkie gry w kasynie są tak skonstruowane, że mają ujemną wartość oczekiwaną z punktu widzenia klienta. Oznacza to, że uwzględniając wszystkie rozgrywki, jakie mają miejsce w salonie gry, średni wynik jest dodatni dla kasyna.



Rysunek 9.4: Krupier (a tym samym kasyno) ma zawsze przewagę nad graczem

Przypomnijmy, że krupier gra prostą strategią polegającą na tym, że dobiera kolejną kartę wtedy i tylko wtedy, gdy ma 16 lub mniej

punktów. Grając taką samą strategią jak krupier, gracz w każdej grze ma wartość oczekiwaną około -6% , tzn. za każde postawione 100 złotych traci średnio 6 złotych w jednej grze. Kasyno wygrywa również w sytuacji, gdy obaj gracze przekroczą 21 (gdy gracz przekroczy, to krupier nawet nie odkrywa swoich kart).

9.4 Strategia

Zastanówmy się zatem, jak można tę przewagę kasyna zredukować. Pierwszym pomysłem jest zastosowanie innej strategii prostej. Możemy np. dociągać karty, aż osiągniemy jakąś założoną wcześniej liczbę punktów, np. 15. W ten sposób nie da się jednak zniwelować przewagi kasyna, można ją co najwyżej powiększyć. Ze strategii prostych najlepszą jest ta, którą stosuje krupier.

Spróbujmy wykorzystać fakt, że krupier odsłania swoją pierwszą kartę. Wpływ tej karty na wynik krupiera obrazuje Tablica 9.2. Pierwsza kolumna tabeli zawiera pierwszą kartę krupiera, a reszta są to prawdopodobieństwa osiągnięcia przez krupiera danego wyniku.

Karta	17	18	19	20	21	BJ	Fura
A	0,13	0,13	0,13	0,13	0,05	0,31	0,12
2	0,14	0,13	0,13	0,12	0,12	0	0,35
3	0,14	0,13	0,13	0,12	0,11	0	0,37
4	0,13	0,13	0,12	0,12	0,11	0	0,39
5	0,12	0,12	0,12	0,11	0,11	0	0,42
6	0,17	0,11	0,11	0,1	0,1	0	0,42
7	0,37	0,14	0,08	0,08	0,07	0	0,26
8	0,13	0,36	0,13	0,07	0,07	0	0,24
9	0,12	0,12	0,35	0,12	0,06	0	0,23
10	0,11	0,11	0,11	0,34	0,03	0,08	0,21

Tablica 9.2: Prawdopodobieństwa osiągnięcia danego wyniku przez krupiera

Widzimy, że gdy krupier ma kartę o niskiej wartości, tzn. 3, 4, 5 lub 6, to ma on duże prawdopodobieństwo fury. Wynika to stąd, że w talii występuje najwięcej kart o wartości 10 (figury i dziesiątki), więc na przykład z 6 często otrzymamy 16, a stąd z kolei już tylko mały krok do przekroczenia 21.

Nasza strategia będzie polegać na tym, że gdy krupier z dużym prawdopodobieństwem przekroczy 21 (to znaczy jeżeli pierwszą kartą

krupiera będzie 2, 3, 4, 5, 6, lub 7) to będziemy wtedy pasować jak najszybciej. W przeciwnym przypadku będziemy stosowali strategię krupiera.

Tabela 9.3 pokazuje, przy jakim aktualnym wyniku należy pasować. Na przykład, jeżeli pierwszą kartą krupiera jest 2, to liczba 14 w kolumnie obok oznacza, że dobieramy karty aż do uzyskania wyniku co najmniej 14 punktów, a następnie pasujemy.

Karta	Strategia
A	17
2	14
3	13
4	13
5	12
6	12
7	17
8	17
9	17
10	17

Tablica 9.3: Strategia prosta

Opisany wyżej sposób postępowania jest to tzw. **strategia podstawowa**. Gdy gramy według tego scenariusza to przewaga kasyna spada do około $-0,5\%$. To znaczy, że pomniejszyliśmy przewagę kasyna dwunastokrotnie! Jednak nadal wartość oczekiwana jest ujemna z punktu widzenia gracza.

9.5 Modyfikacja strategii

Strategia podstawowa znacznie zmniejszyła uprzywilejowaną pozycję kasyna. To nas jednak jeszcze nie zadowala. Chcielibyśmy osiągnąć sytuację w której to gracz, a nie kasyno, będzie miał przewagę. Celem jest, aby gra miała dodatnią wartość oczekiwaną z punktu widzenia klienta.

Jak to zrobić? Otóż wykorzystamy fakt, że w rzeczywistości nie jest tak, że każde rozdanie rozgrywane jest od nowa przetasowaną talią. Kolejne rozdanie odbywa się kartami, które nie zostały użyte w poprzednim. Bardzo uważny obserwator może zatem zapamiętać, jakie karty zostały w talii. Na tej podstawie można zmodyfikować strategię.

■ **Przykład 9.1** Powiedzmy, że w talii pozostały w dużej większości karty o wartości 10. Wówczas, gdy odkrytą kartą krupiera jest 2, 3, 4, 5 lub 6 to mamy niemal pewność, że będzie miał on furę (gdyż może dobrać praktycznie tylko 10, a poniżej 17 się nie zatrzyma). W takim przypadku będziemy tylko unikać przekroczenia i wygrywać z dużą pewnością. ■

Klasycznie w blackjacku używa się aż do ośmiu talii kart, czyli $8 \cdot 52 = 416$ kart. W związku z tym zapamiętanie dokładnie, jakie karty zostały już wykorzystane jest niemożliwe. Stosuje się uproszczone metody obliczania tego, jak dobra jest dana talia dla gracza w danym momencie.

Najprostszy stosowany sposób to:

- 2, 3, 4, 5, 6 mają wartość +1;
- 7, 8, 9 mają wartość 0;
- 10, As i figury mają wartość -1.

Przez całą grę sumujemy wartości dla wszystkich wykorzystanych kart, otrzymując tzw. **wartość bieżącą**. Im jest ona większa, tym bardziej opłacalna dla nas staje się gra. Już przy wartości +2 gracz uzyskuje przewagę nad kasynem.



Rysunek 9.5: Kadr z filmu "21"

Ten mechanizm został przedstawiony w filmie "21" z 2008 roku, jednak bez żadnych szczegółów. Jest to oparta na faktach opowieść o błyskotliwych studentach prestiżowej amerykańskiej uczelni MIT, którzy podbili kasyna Las Vegas wygrywając miliony dolarów. Główny bohater filmu to inteligentny, choć nieśmiały student. Musi zapłacić 300 tysięcy dolarów czesnego i pomagają mu w tym karty. Dołącza bowiem do grupy najlepszych studentów, którzy w każdy weekend jeżdżą do Las Vegas grać w blackjaka. Ich mentorem i opiekunem jest profesor matematyki, który opracował metodę liczenia kart pozwalającą wygrać z kasynem. Łatwe pieniądze są w zasięgu ręki. Ale pomimo, że liczenie kart nie jest nielegalne, stawka idzie o tak duże sumy, że graczami interesuje się szef ochrony kasyna.

Duża **wartość bieżąca** oznacza, iż w talii pozostało sporo kart o wartości 10 i zwiększa się prawdopodobieństwo tego, że krupier będzie miał furę. Gdy wartość bieżąca jest ujemna to wtedy gramy na małe stawki, a gdy jest istotnie dodatnia, to wtedy podnosimy stawkę. To znaczy gramy kolejne gry np. o 100 złotych zamiast o 1 złoty. Odpowiednio manewrując stawkami, możemy wreszcie osiągnąć upragnioną przewagę.



Rysunek 9.6: Chęć szybkiego wzbogacenia się to główny powód grania w blackjaka.

Rewelacja! Jutro możemy zatem iść do kasyna i zacząć wygrywać miliony! Niestety, nie do końca. Aby nauczyć się sprawnego liczenia

kart oraz zmieniających się strategii potrzeba zdolności szybkiego liczenia oraz dużo pracy. Poza tym kasyna zaczęły się bronić przed klientami wprowadzając maszyny do tasowania po każdym rozdaniu.

