



## 6. Statystyka dla fizyka

*Andrzej Chmielowiec*

### 6.1 Wstęp

Fizyka nieodzownie związana jest z przeprowadzaniem doświadczeń i eksperymentów, które mają na celu badanie różnego rodzaju zjawisk. Podczas dużej części doświadczeń konieczne jest wykonywanie pomiarów pozwalających na weryfikację prawdziwości postawionych wcześniej tez. Skąd jednak pewność, czy zmierzona wielkość faktycznie taka jest. A może podczas pomiaru wystąpił jakiś błąd, który zaburzył odczytany wynik? Ile należy wykonać pomiarów, aby z dużym prawdopodobieństwem stwierdzić, że badana wielkość ma taką, a nie inną wartość? Czy wiadomo nam coś na temat błędu, który popełniamy podczas pomiaru? To tylko niektóre pytania, które stawia sobie fizyk podczas wykonywania eksperymentów. Z pomocą w takich sytuacjach przychodzi statystyka.

Można powiedzieć, że statystyka jest to dziedzina matematyki zajmująca się wyciąganiem wniosków, dotyczących ogółu, na podstawie badanej próby. Aktualnie jej metody znajdują zastosowanie niemal w każdej gałęzi nauki i gospodarki. Znaczenie tej dziedziny staje się z roku na rok coraz większe. Należy też przypuszczać, że w kolejnych latach będzie jeszcze rosło. Wynika to, przede wszystkim, z faktu wykorzystania metod statystyki i rachunku prawdopodobieństwa w uczeniu maszynowym i sztucznej inteligencji.

O obszarach zastosowania metod statystycznych powstało już bardzo wiele podręczników i książek. Co zatem można zaprezentować na kilku stronach niniejszego rozdziału, aby przybliżyć czytelnikowi sposób działania statystyki? Wydaje się, że zasadnym będzie tu przedstawienie podstawowych koncepcji, które stanowią fundament tej nauki i sprawiają, że jest ona tak powszechnie wykorzystywana. Wszystko to zostanie zaprezentowane w kontekście prostych pomiarów fizycznych, które czytelnik może przeprowadzić samodzielnie w warunkach domowych.

## 6.2 Statystyka, a prawdopodobieństwo

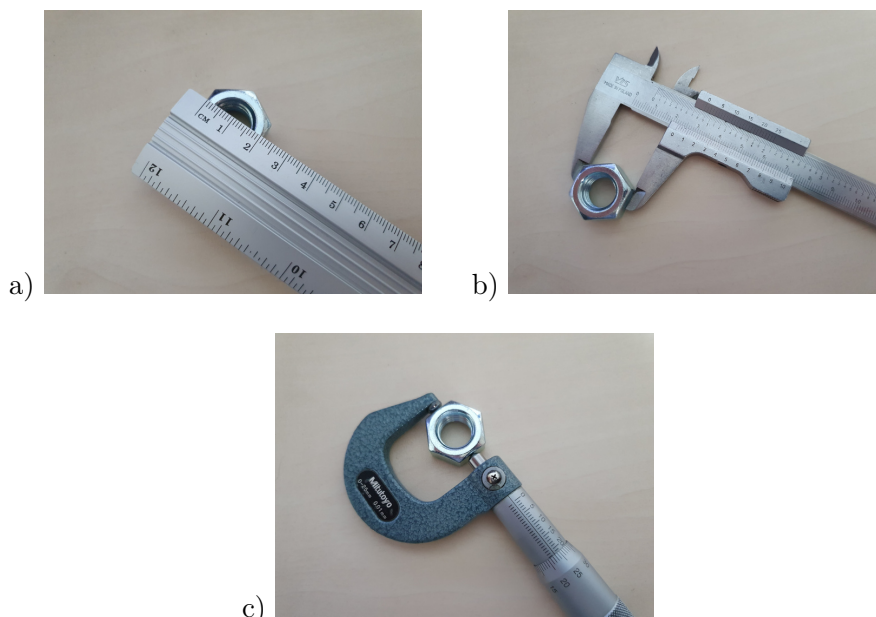
Rozważania w tej części rozpoczniemy od jednego z najbardziej znanych cytatów, który dotyczy statystyki. Mark Twain powiedział kiedyś, że

*Są trzy rodzaje kłamstw: kłamstwa, bezczelne kłamstwa i statystyki.*

Ta niezwykle trafna wypowiedź ma uzmysławiać nam, jak wielkie pole do nadużyć stwarza statystyka. Podkreślić jednak należy, że nadużycia te możliwe są w głównej mierze przez powszechne niezrozumienie, czym jest ta nauka i w jaki sposób odpowiada na pytania. Pierwszą i zasadniczą kwestią, jaką należy sobie uzmysłwić jest to, że statystyka **nigdy** nie daje odpowiedzi **na pewno**. Bardzo często w mediach pojawiają się na przykład statystyki dotyczące badania preferencji wyborczych. Po podaniu wyników widz lub czytelnik jest informowany, że badanie przeprowadzono na próbie liczącej nieco ponad tysiąc osób, a dopuszczalny błąd badania wynosi 3%. Czy to oznacza, że podane wyniki mogą się różnić jedynie o  $\pm 3\%$ ? Każdy z nas czuje podświadomie, że jeśli przebadano jedynie tysiąc osób z prawie 30 milionów uprawnionych do głosowania, to w zasadzie ten błąd może być dużo większy. I tak rzeczywiście jest – błąd może być dużo większy niż te wspomniane 3%. Większość osób nazywa, w tym momencie, statystykę kłamstwem, choć to nie wina tej nauki, że przekazuje się nam niekompletną informację. Prawidłowa informacja powinna brzmieć na przykład, że maksymalny błąd wynosi  $\pm 3\%$  z prawdopodobieństwem 95% (pamiętajmy, że statystyka nigdy nie daje odpowiedzi na pewno, czyli na 100%).

Nie powinniśmy mylić statystyki z prawdopodobieństwem. To drugie dotyczy analizy własności, która obowiązuje całą populację – wszystkie możliwe zdarzenia. Natomiast statystyka, to wnioskowanie o prawdopodobieństwie na podstawie analizy próbki. Siłą rzeczy nie

## 6.3 Pomiary fizyczne i wyznaczanie podstawowych statystyk 77



Rysunek 6.1: Pomiar śruby przy użyciu: a) linijki z dokładnością do  $10^{-3}$  m, b) suwmiarką z dokładnością do  $2 \cdot 10^{-5}$  m, c) mikrometrem z dokładnością do  $10^{-5}$  m

mogą więc to być wnioski pewne. Jedyne, co można w takiej sytuacji zrobić, to minimalizować prawdopodobieństwo popełnienia błędu. Nie obrażamy się zatem na statystykę, tylko podchodzimy prezentowanych za jej pomocą wniosków z należyтым zrozumieniem i rezerwą.

### 6.3 Pomiary fizyczne i wyznaczanie podstawowych statystyk

Pomiaru wielkości fizycznych możemy dokonywać za pomocą różnych przyrządów. Każdy taki przyrząd charakteryzuje się pewnym poziomem dokładności. Na Rysunku 6.1 pokazano pomiar nakrętki za pomocą linijki, suwmiarki i mikrometru. Każdy z zaprezentowanych przyrządów charakteryzuje się inną precyzją pomiaru. Najmniej dokładna jest linijka, której podziałka pozwala na pomiar odległości z dokładnością do  $10^{-3}$  m. Suwmiarka analogowa umożliwia pomiary z dokładnością do  $2 \cdot 10^{-5}$  m. Najdokładniejszy z całej trójki jest natomiast mikrometr, który pozwala mierzyć odległość z dokładnością  $10^{-5}$  m. Aby zilustrować możliwości zastosowania statystyki, do pomiarów

Typ nakrętki	Zmierzone wymiary [mm]
M10	16.77, 16.79, 16.76, 16.76, 16.79, 16.80, 16.77, 16.75, 16.78, 16.79, 16.80, 16.76, 16.78, 16.79, 16.80, 16.78, 16.77, 16.77, 16.76, 16.77, 16.78, 16.80, 16.76, 16.77, 16.78, 16.79, 16.77, 16.78, 16.79, 16.76
M12	18.75, 18.74, 18.80, 18.76, 18.73, 18.77, 18.75, 18.76, 18.76, 18.74, 18.78, 18.77, 18.76, 18.75, 18.78, 18.75, 18.77, 18.77, 18.74, 18.76, 18.79, 18.79, 18.76, 18.75, 18.78, 18.76, 18.73, 18.78, 18.73, 18.76
M14	21.71, 21.72, 21.72, 21.71, 21.72, 21.73, 21.72, 21.70, 21.72, 21.71, 21.73, 21.71, 21.72, 21.71, 21.72, 21.79, 21.81, 21.77, 21.70, 21.74, 21.72, 21.73, 21.73, 21.73, 21.78, 21.78, 21.79, 21.80, 21.81, 21.80

Tablica 6.1: Wyniki pomiaru odległości pomiędzy przeciwległymi ściankami dla zestawów nakrętek M10, M12 i M14.

wykorzystany został mikrometr. Przy jego pomocy zmierzone zostały zestawy sześciokątnych nakrętek M10, M12 i M14. Przeprowadzone eksperymenty dały wyniki, które zaprezentowano w Tabeli 6.1. Jak widać, wyniki każdego eksperymentu obejmują 30 pomiarów, wykonanych na zestawach 10 nakrętek (pomiarowi poddana została odległość pomiędzy każdą parą przeciwległych ścianek nakrętki). Odległość pomiędzy przeciwległymi ściankami dla takich nakrętek określa norma DIN 934 i wynosi ona dla nakrętek M10, M12 i M14 odpowiednio 17 mm, 19 mm i 22 mm.

**Ćwiczenie 6.1** Kup w sklepie budowlanym zestaw nakrętek i zmierz odległość pomiędzy przeciwległymi ściankami za pomocą mikrometru lub suwmiarki. Zauważ, że do wykonania tego ćwiczenia kompletnie nie nadaje się linijka. Jej dokładność jest zbyt mała, żeby uchwycić tak drobne różnice w wymiarach. ■

Gdy dysponujemy wynikami pomiarów, możemy przystąpić do wyznaczania statystyk. Statystyki, to funkcje, których argumentami są wyniki pomiarów. Jedną z najpowszechniej stosowanych statystyk jest

średnia arytmetyczna z próby, która wyraża się wzorem

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n},$$

gdzie  $n$  jest liczbą pomiarów, a  $x_1, x_2, \dots, x_n$  oznaczają uzyskane wyniki. Średnia arytmetyczna jest tak zwanym estymatorem wartości oczekiwanej, który najczęściej oznaczany jest przez  $\hat{\mu}$ .

**Definicja 6.1** Estymatorem nazywamy statystykę, służącą do szacowania wartości parametru rozkładu prawdopodobieństwa w danej populacji.

■ **Przykład 6.1** W naszym eksperymencie pomiarowym pobraliśmy pewną próbkę nakrętek. Na podstawie dokonanych pomiarów chcielibyśmy oszacować, jaka jest wartość oczekiwana odległości pomiędzy ściankami nakrętki. W tym celu przyjmujemy, że estymatorem  $\hat{\mu}$  tej wartości oczekiwanej jest średnia arytmetyczna  $\bar{x}$  z pomiarów. Aby jednak cały wywód był kompletny musimy założyć pewien rozkład prawdopodobieństwa dla zmiennej losowej, która określa odległości pomiędzy ściankami. Dla pomiarów fizycznych, najczęściej zakłada się, że rozkład prawdopodobieństwa takiej zmiennej jest rozkładem normalnym (czym jest rozkład normalny napiszemy później). ■

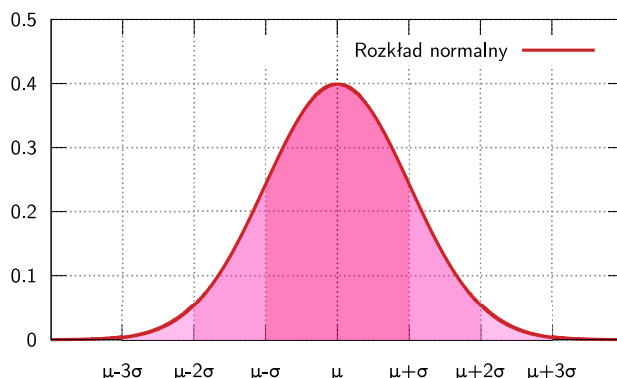
Kolejną typową statystyką, którą wyznaczamy dla serii pomiarów jest odchylenie standardowe, a raczej jego estymator. Jego zadaniem jest wyrażenie pewnej miary błędu, który jest popełniany podczas przeprowadzania eksperymentu:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n - 1}}.$$

Niekiedy używany jest też estymator, dla którego w mianowniku pojawia się  $n$ , a nie  $(n - 1)$ . Niemniej ten, który został zapisany ma w pewnym sensie lepsze własności matematyczne i statystyczne. Niestety dokładne wyjaśnienie tego, dlaczego tak się dzieje znacznie wykracza poza ramy niniejszego rozdziału.

Przy użyciu standardowych funkcji arkusza kalkulacyjnego, możemy z łatwością wyznaczyć estymatory wartości oczekiwanej i odchylenia standardowego dla wykonanego eksperymentu pomiarowego. W przypadku danych z Tabeli 6.1 wynoszą one odpowiednio:

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{M10} &= 16.78, & \hat{\sigma}_{M10} &= 0.014, \\ \hat{\mu}_{M12} &= 18.76, & \hat{\sigma}_{M12} &= 0.018, \\ \hat{\mu}_{M14} &= 21.74, & \hat{\sigma}_{M14} &= 0.036. \end{aligned}$$



Rysunek 6.2: Funkcja gęstości prawdopodobieństwa rozkładu normalnego  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ .

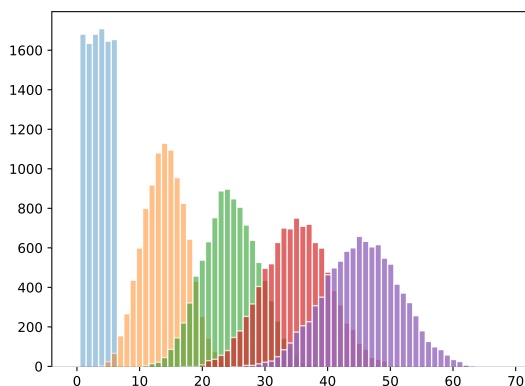
**Ćwiczenie 6.2** Wprowadź dane z wykonanych przez siebie pomiarów do arkusza kalkulacyjnego i wyznacz średnią arytmetyczną oraz odchylenie standardowe dla każdej serii pomiarów. ■

## 6.4 Rozkład normalny i błędy pomiarowe

Rozkład normalny jest rozkładem opartym na dwóch parametrach. Są nimi wartość oczekiwana  $\mu$  oraz odchylenie standardowe  $\sigma$ . Funkcja gęstości prawdopodobieństwa dla rozkładu normalnego  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  wyraża się wzorem

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

Wykres przebiegu tej funkcji został pokazany na Rysunku 6.2. Dlaczego rozkład normalny jest taki ważny? Okazuje się, że jeśli analizujemy wiele niezależnych zmiennych losowych, to rozkład sumy tych zmiennych losowych *przypomina*, w pewnym sensie właśnie, rozkład normalny. Zilustrujemy tę prawidłowość na przykładzie rzutu sześcienną kostką do gry. Wyobraźmy sobie, że wykonujemy rzut 1, 4, 7, 10 i 13 kostkami. Po każdym rzucie sumujemy liczbę oczek, która pojawi się na kostkach. Jeżeli powyższy eksperyment powtórzymy 10 000 razy, to powinniśmy umieć wywnioskować coś na temat rozkładu prawdopodobieństwa w takich doświadczeniach. Przy rzucie jedną kostką rozkład powinien być, mniej więcej, równomierny. Wynika to z faktu, że każdą możliwą sumę uzyskujemy jedynie na jeden sposób. W przypadku rzutu 4 kostkami



Rysunek 6.3: Rozkład normalny prawdopodobieństwa

jest już jednak inaczej. Liczbę oczek równą 4 uzyskujemy bowiem tylko na jeden sposób, liczbę oczek równą 5 na 4 sposoby, a liczbę oczek równą 6 na 10 sposobów itd. Wyniki symulacji komputerowej tego procesu przedstawione zostały na Rysunku 6.3. Przedstawione histogramy pokazują ile razy (oś rzędnych) podczas 10 000 rzutów wypadła określona liczba oczek (oś odciętych). Z rysunku wynika jasno, że im więcej kostek, tym bardziej przedstawiony histogram przypomina swoim kształtem krzywą gęstości rozkładu normalnego. Ta obserwacja została matematycznie sformalizowana i nosi nazwę *Centralnego Twierdzenia Granicznego*.

Podczas pomiarów fizycznych mamy do czynienia z podobną sytuacją. Wykonujemy eksperyment w sytuacji, gdy wpływa na niego wiele losowych i niezależnych czynników, które nakładają się na siebie. Nie mamy wiedzy na temat każdego z nich z osobna, ale Centralne Twierdzenie Graniczne mówi, że ich sumaryczny rozkład powinien przypominać rozkład normalny. W związku z powyższym, bardzo często zakładamy (nie mając innego wyboru), że rozkład błędów jest właśnie rozkładem normalnym  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ .

Przyjrzyjmy się teraz wynikom uzyskanym podczas pomiarów na krętek M10, M12 i M14. Do analizy wykorzystane zostały biblioteki języka Python, które umożliwiają narysowanie histogramu oraz wyznaczenie najlepszego *dopasowania* danych pomiarowych do rozkładu normalnego o określonych parametrach. Na Rysunku 6.4 przedstawiono przykładowy program analizujący dane pomiarowe i przedstawiający

```

1 # Import bibliotek zewnętrznych.
2 from reliability.Fitters import Fit_Normal_2P
3 import matplotlib.pyplot as plt
4 import numpy as np
5
6 # Dane pomiarowe.
7 x = [16.77, 16.79, 16.76, 16.76, 16.79, 16.80, \
8      16.77, 16.75, 16.78, 16.79, 16.80, 16.76, \
9      16.78, 16.79, 16.80, 16.78, 16.77, 16.77, \
10     16.76, 16.77, 16.78, 16.80, 16.76, 16.77, \
11     16.78, 16.79, 16.77, 16.78, 16.79, 16.76]
12
13 # Najlepsze dopasowanie do rozkładu normalnego.
14 fit = Fit_Normal_2P(failures=x, method='LS', color='#396AB1', \
15                  linewidth=2.5)
16
17 plt.title('')
18 plt.xticks(size=12)
19 plt.yticks(size=12)
20 plt.ylabel('Odsetek przeanalizowanych', fontsize=20)
21 plt.xlabel('Wynik pomiaru', fontsize=20)
22 plt.legend(fontsize=16)
23 plt.savefig('pp.svg', pad_inches=0.1, bbox_inches="tight")
24
25 # Histogram.
26 fig, ax = plt.subplots()
27 ax.hist(x, bins=[16.745, 16.755, 16.765, 16.775, 16.785, 16.795, \
28          16.805], density=True, alpha=0.5, linewidth=4, color='#396AB1', \
29          edgecolor='white')
30 fit.distribution.PDF(label='PDF', color='#396AB1', linewidth=2.5)
31 plt.title('')
32 plt.ylabel('')
33 plt.xlabel('')
34 plt.savefig('hist.svg')
35

```

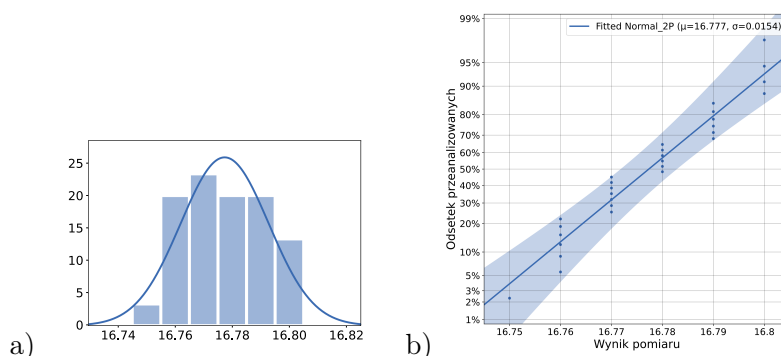
Rysunek 6.4: Kod programu do analizy statystycznej danych pomiarowych i rysowania wykresów prezentujących wyniki.

wyniki w formie wykresów.

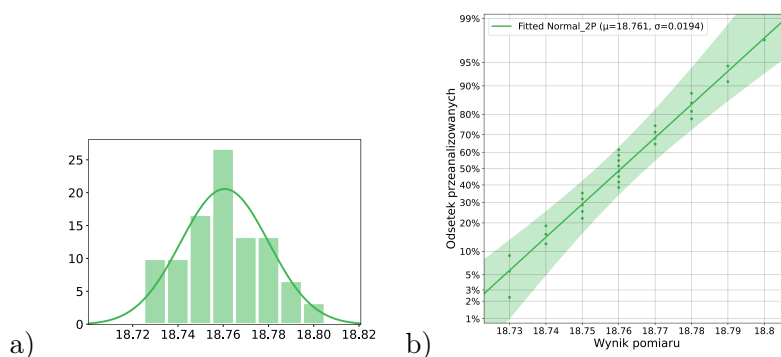
Analiza danych dla nakrętki M10 wykazała, że najlepiej dopasowany do wyników jest rozkład normalny o parametrach  $\mu = 16.777$  i  $\sigma = 0.0154$ . Wykres rozkładu o takich parametrach został naniesiony na histogram prezentowany na Rysunku 6.5 a). Dopasowanie nie jest idealne, ale na Rysunku 6.5 b) widzimy, że wszystkie wyniki pomiarów mieszczą się w strefie dopuszczalnego błędu. Ponieważ poziom istotności badania został ustawiony na 5%, to możemy stwierdzić, że z prawdopodobieństwem 95% wartość średnia pomiaru wynosi 16.777, a błąd równy trzem odchyleniom standardowym wynosi  $\pm 0.0462$ . Warto w tym miejscu wspomnieć: dlaczego za błąd najczęściej przyjmujemy równowartość  $\pm 3\sigma$ ? Wynika to z faktu, że dla rozkładu normalnego 99.73% wyników znajduje się właśnie w obszarze  $\mu \pm 3\sigma$ .

Odpowiedni poziom dopasowania wykazują również pomiary wykonane dla nakrętki M12. Wykorzystane oprogramowanie wskazało, że najbardziej dopasowany do tych wyników jest rozkład normalny o parametrach  $\mu = 18.761$  i  $\sigma = 0.0194$ . Podobnie, jak w poprzednim przypadku, na Rysunku 6.6 a) przedstawiono histogram wraz z naniesionym rozkładem, a Rysunek 6.6 b) prezentuje poziom dopasowania wyników do rozkładu normalnego. Możemy zaobserwować, że również w tym przypadku, wszystkie wyniki znajdują się w strefie dopusz-





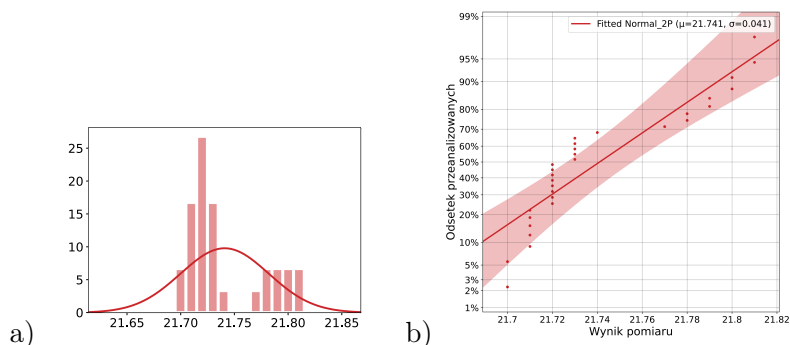
Rysunek 6.5: Wyniki analizy statystycznej danych pomiarowych dla nakrętki M10: a) histogram, b) wykres prawdopodobieństwa.



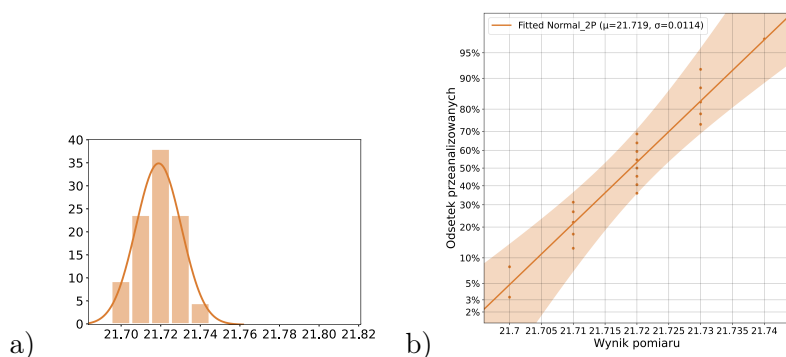
Rysunek 6.6: Wyniki analizy statystycznej danych pomiarowych dla nakrętki M12: a) histogram, b) wykres prawdopodobieństwa.

czalnego błędu. Zatem z prawdopodobieństwem 95% stwierdzamy, że wartość średnia wynosi 18.761, a błąd jest równy  $\pm 0.0582$ .

Z zupełnie odmienną sytuacją mamy do czynienia w przypadku pomiarów dla nakrętki M14. Wyniki zaprezentowane na Rysunku 6.7 pokazują znaczne odstępstwo od rozkładu normalnego. Widoczne jest to zarówno na histogramie, jak i na wykresie prawdopodobieństwa. Z wykresu b) wynika, że aż 9 z 30 pomiarów umieszczonych jest poza obszarem dopuszczalnego błędu. W takich sytuacjach należy podjąć decyzję o odrzuceniu hipotezy, że badane wyniki należą do rozkładu normalnego. Analiza histogramu wyraźnie wskazuje, że 9 wyników znacznie odstaje od pozostałych pomiarów. Jeżeli jednak przyjmujemy, że były to egzemplarze niepoprawnie wykonanych nakrętek, to otrzymamy rozkład, jak najbardziej zbliżony do rozkładu normalnego. Wyniki ana-



Rysunek 6.7: Wyniki analizy statystycznej danych pomiarowych dla nakrętki M14: a) histogram, b) wykres prawdopodobieństwa.



Rysunek 6.8: Wyniki analizy statystycznej danych pomiarowych dla nakrętki M14 po odrzuceniu 9 największych wartości: a) histogram, b) wykres prawdopodobieństwa.

lize danych po redukcji 9 największych wartości pomiarowych zostały zilustrowane na Rysunku 6.8. Powstaje jednak pytanie, dotyczące powodu odrzucenia pomiarów z próby. W niektórych przypadkach takie uzasadnienie jest sensowne, a w innych kompletnie niewłaściwe. W takich właśnie sytuacjach wchodzimy w obszar manipulacji danymi. Nigdy bowiem nie ma pewności, czy odrzucane pomiary są ewidentnym wynikiem jakiegoś *grubego* błędu pomiarowego, czy ich odrzucenie powodowane jest chęcią wpasowania wyników w określony rozkład prawdopodobieństwa.

**Ćwiczenie 6.3** Wykorzystaj przykładowy program do wykonania analiz dla własnych pomiarów. Do uruchomienia programu przygo-

owanego w języku Python możesz wykorzystać jedno z dostępnych środowisk (np. Anaconda – otwarte środowisko programistyczne dla języka Python dostępne nieodpłatnie na stronie [anaconda.com](https://anaconda.com) lub Google Colab – bezpłatne środowisko online). ■

## 6.5 Podsumowanie

W rozdziale przedstawione zostały podstawowe zagadnienia dotyczące analizy statystycznej danych pomiarowych. Poza takimi pojęciami, jak średnia arytmetyczna i odchylenie standardowe wprowadzono również podstawy analizy błędu pomiarowego. Dodatkowo zaprezentowano, jak za pomocą darmowych narzędzi dokonać bardziej skomplikowanych analiz – między innymi wyznaczenia parametrów rozkładu i weryfikacji hipotezy, czy analizowane dane świadczą o normalności rozkładu.

Rozdział ten ma być punktem wyjścia dla wszystkich uczniów, którzy chcieliby zgłębiać meandry statystycznej analizy danych. W dobie powszechnej informatyzacji i cyfryzacji naszego życia zagadnienia te są niezwykle istotne nie tylko dla fizyków. Zachęcamy więc do dalszego poszerzania wiedzy na temat zagadnień związanych z analizą danych.

