

7. Czym jest modelowanie?

Andrzej Chmielowiec

7.1 Wstęp

Żyjemy w świecie, w którym wiele potrafimy przewidzieć i wyliczyć. Staramy się okiełznać otaczającą nas rzeczywistość i oprawić ją w określone ramy. Część z tych naszych działań kończy się powodzeniem. Potrafimy przewidzieć trajektorię ruchu rakiety, wykonać rzecz na podstawie rysunku, wyznaczyć miejsce pęknięcia belki poddanej obciążeniu, a nawet przeprowadzić symulację zderzenia samochodów. Wszystkie te czynności możliwe są dzięki umiejętności budowania odpowiednich modeli. Ciągle jednak bardzo wiele zjawisk wymyka się naszym możliwościom poznawczym.

Starożytny filozof Platon uważał, że otaczający nas świat jest jedynie pewną, niedoskonałą projekcją świata idei. Wyznawał pogląd, że wszystko, co obserwujemy jest cieniem rzucanym przez idealne, abstrakcyjne byty. W tym kontekście można powiedzieć, że modelowanie jest poszukiwaniem właśnie tych abstrakcyjnych bytów, które odpowiadają określonym elementom rzeczywistości. Wyobraźmy sobie, że chcemy wykonać metalowy wałek, mający kształt walca. Przygotowujemy rysunek, który przedstawia jego rzuty, zawierające takie wymiary, jak średnica i wysokość. To jest właśnie nasz model – obraz idealnego elementu. Co jednak z naszej idei pozostanie w świecie fizycznym? To zależy od jakości wykonania. Niemniej jednak pod

Norway grants

Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).

Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.



Rysunek 7.1: Fontanny wyrzucające strumień wody ze stałą prędkością i pod określonym kątem [źródło: Wikipedia].

odpowiednim powiększeniem zobaczymy góry i doliny – całą masę nierówności wynikającą z procesu obróbki metalu.

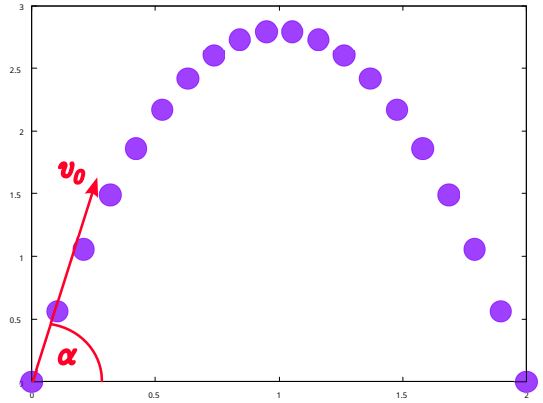
W tym rozdziale, na kilku przykładach, przedstawione zostanie zagadnienie modelowania zjawisk fizycznych przy użyciu pojęć matematycznych. Rozpoczniemy od prostego przykładu, który będziemy komplikowali w kolejnych częściach.

7.2 Modelowanie rzutu ukośnego

Rozważmy sytuację, w której nadajemy ciału pewną prędkość początkową, skierowaną pod kątem α do poziomu. Na lekcjach fizyki sytuacja ta nazywana jest rzutem ukośnym. Ciało o takiej prędkości początkowej unosi się, a po osiągnięciu pewnej wysokości maksymalnej zaczyna opadać. Pojawia się jednak pytanie: jaka jest trajektoria jego ruchu? Na Rysunku 7.1 przedstawiono fontannę, wyrzucającą strumień wody ze stałą prędkością i pod ustalonym kątem. Na zdjęciu możemy zobaczyć, w jaki kształt układają się cząsteczki wody. Kształt ten pokazuje trajektorię, która przypomina odwróconą parabolę. Dlaczego jednak tak się dzieje?

Powodem jest siła grawitacji, która w specyficzny sposób modyfikuje tor ruchu cząsteczek wody. Wyobraźmy sobie, że punkt materialny wyrzucono z prędkością początkową v_0, nachyloną pod kątem α do

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.



Rysunek 7.2: Rzut ukośny punktu materialnego z prędkością początkową v_0.

poziomu tak, jak to zostało zilustrowane na Rysunku 7.2. Jeżeli pominąć opory ruchu, to w poziomie punkt będzie poruszał się ruchem jednostajnym ze stałą prędkością $v_0 \cos\alpha$, a ruch w pionie będzie miał charakter ruchu jednostajnie opóźnionego. Jeżeli przez x oznaczymy położenie punktu w poziomie, a przez y położenie w pionie, to równania ruchu mają w tym przypadku postać:

$$x(t) = (v_0 \cos\alpha)t,$$
$$y(t) = (v_0 \sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2,$$

gdzie $g = 9.81\ \mathrm{ms}^{-2}$ jest przyspieszeniem ziemskim przy powierzchni. Powyższe równania noszą nazwę równań parametrycznych, gdyż zadają trajektorię ruchu w zależności od parametru t, którym jest czas. Bez trudu jednak możemy wyeliminować z nich zmienną parametryczną, aby uzyskać wzór funkcji przedstawiającej trasę, po której porusza się punkt materialny. Wyznaczając t z pierwszego równania i podstawiając do drugiego otrzymujemy zależność:

$$y = \mathrm{tg}\alpha \cdot x - \frac{g}{2(v_0 \cos\alpha)^2}x^2.$$

Widzimy zatem ewidentnie, że trajektoria ruchu ma kształt odwróconej paraboli, który zależy od prędkości początkowej v_0 oraz kąta jej nachylenia do poziomu α.

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

Ćwiczenie 7.1 Odkręć słuchawkę od węża prysznicowego i regulując ilość wypływającej cieczy oraz kąt, pod jakim wypływa, zobacz możliwe trajektorie ruchu cząsteczek wody. Czy istnieją sytuacje, w których wypływająca ciecz nie formuje odwróconej paraboli? ■

7.3 Rzut ukośny z oporem powietrza

Rozważany, w poprzedniej części, rzut ukośny nie uwzględniał sił oporów, na które napotyka poruszające się ciało. W przypadku strumienia cieczy może to być jak najbardziej uzasadnione, gdyż poruszające się cząsteczki znajdują się niejako w *tunelu*, do którego nie ma dostępu powietrze stanowiące opór. Jeśli jednak rozważać będziemy rzut piłką, to trajektoria ruchu nie będzie się już dawała opisywać za pomocą paraboli. Zasadniczym powodem jest opór jaki stawia powietrze, poruszającym się w nim obiektom. Okazuje się, że dla obiektu o zadanej średnicy, siła oporu powietrza jest proporcjonalna do prędkości lub do kwadratu prędkości.

Spróbujemy teraz poprawić model, który zastosowaliśmy w poprzedniej części, aby jego nowa wersja uwzględniała, w jakimś stopniu, opory ruchu. Do tej pory ustaliliśmy, że mamy możliwość wykorzystania dwóch wzorów na siłę oporu powietrza:

$$F_1 = k_1 \cdot v,$$
$$F_2 = k_2 \cdot v^2.$$

Zastosowanie jednego lub drugiego zależy od tego, czy powietrze opływa poruszający się obiekt w sposób laminarny, czy też turbulentny. Przez laminarny rozumiemy tutaj taki przepływ, w którym cząsteczki powietrza układają się w gładkie linie, po których następuje ich ruch. Taki przepływ jest przepływem bezwirowym. Z kolei przepływ turbulentny to taki, przy którym przepływające powietrze przepływa w sposób chaotyczny, tworząc zawirowania. Oba rodzaje przepływów zostały bardzo ładnie zilustrowane na Rysunku 7.3, który przedstawia dym, przechodzący od przepływu laminarnego w dolnej części obrazka do przepływu turbulentnego w jego górnej części. Jak można zauważyć przepływ staje się turbulentny w sposób nagły i nie ma tutaj specjalnie żadnego stanu pośredniego. Granicą, która ustala rodzaj przepływu jest wartość, tak zwanej liczby Reynoldsa. Jeżeli wartość tej liczby $\mathrm{Re} \leq 1000$, to przyjmuje się, że przepływ powietrza jest laminarny i siła oporu dana jest wzorem $F_1 = k_1 v$. Jeśli z kolei $\mathrm{Re} > 1000$, to przyjmujemy, że przepływ powietrza jest turbulentny i należy zastosować

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.



Rysunek 7.3: Dym przechodzący od przepływu laminarnego (dolna część) do przepływu turbulentnego (górna część) [źródło: Wikipedia].

wzór $F_2 = k_2 v^2$. Skąd jednak mamy wiedzieć, z którym przypadkiem mamy do czynienia? Otóż okazuje się, że jeśli poruszającym obiektem jest sfera, to liczba Reynoldsa dana jest wzorem

$$\mathrm{Re} = \frac{vD}{\nu},$$

gdzie v jest prędkością, z jaką powietrze opływa sferę, D jest jej średnicą, a ν jest lepkością kinematyczną (w temperaturze 25°C wynosi ona $1.562 \cdot 10^{-5}$ m^2/s. Można zatem powiedzieć, że jeżeli iloczyn prędkości powietrza i średnicy sfery przekracza wartość 0.01562 m^2/s, to mamy do czynienia z przepływem turbulentnym i wykorzystujemy siłę F_2, a poniżej tej wartości stosujemy zależność na siłę F_1.

■ **Przykład 7.1** Przyjmijmy, że dysponujemy typową piłką nożną. Jej średnica powinna wynosić około 22 cm = 0.22 m. Jeżeli taka piłka będzie poruszała się z prędkością powyżej 7.1 cm/s, to powinniśmy już zastosować wzór na siłę F_2. Widzimy zatem, że w tym przypadku prędkość jest tak niewielka, że jeśli będziemy rozważali kopanie takiej piłki, to możemy śmiało przyjąć wykorzystanie siły F_2 dla każdej wartości prędkości. Oczywiście będzie to pewne uproszczenie, ale godzimy się na nie, gdyż popełniony błąd będzie w tym przypadku znikomy. Wynika to z faktu, że przez znaczną część rzutu piłka będzie miała większą prędkość niż te wymagane 7.1 cm/s. ■

Biorąc pod uwagę powyższy przykład, możemy próbować zapisać równanie ruchu dla piłki, która wykonuje rzut ukośny. W tym

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

przypadku nie mamy już jednak bezpośredniej możliwości zapisania współrzędnych $x(t)$ oraz $y(t)$, jak poprzednio. Gdy pomijaliśmy opory, to ruch był bardzo prosty: jednostajny w poziomie i jednostajnie opóźniony w pionie. Teraz jednak pojawiła się siła, która jest proporcjonalna do kwadratu prędkości i przeciwnie skierowana do kierunku ruchu. To mocno komplikuje nasze zagadnienie, gdyż siła będzie zmienna w trakcie trwania ruchu. Skoro nie potrafimy bezpośrednio wyznaczyć współrzędnych, to zacznijmy od tego, co znamy – bilansu sił. W tym przypadku skorzystamy z drugiej zasady dynamiki Newtona, która mówi, że przyspieszenie ciała jest proporcjonalne do przyłożonej siły i odwrotnie proporcjonalne do jego masy. W związku z tym przyspieszenie wzdłuż osi x możemy wyrazić jako

$$a_x = -\frac{1}{m}F_x,$$

gdzie m jest masą ciała, a F_x jest poziomą składową siły oporu powietrza. Podobne równanie możemy zapisać dla ruchu w pionie. Tym razem, należy jednak do niego dodać siłę ciężkości

$$a_y = -g - \frac{1}{m}F_y.$$

Z naszych dotychczasowych ustaleń dotyczących siły oporu powietrza wiemy ponadto, że

$$\sqrt{F_x^2 + F_y^2} = kv^2,$$

gdzie v jest prędkością ciała, a k jest oporem powietrza, który zależy od kształtu ciała. Teraz skorzystajmy z faktu, że przyspieszenie jest pochodną prędkości po czasie. W związku z tym dla małych przyrostów Δ możemy zapisać

$$\frac{\Delta v_x}{\Delta t} = -\frac{1}{m}F_x,$$
$$\frac{\Delta v_y}{\Delta t} = -g - \frac{1}{m}F_y.$$

Ponieważ siła oporu ma ten sam kierunek i przeciwny zwrot w stosunku do wektora prędkości, to jej składowe spełniają zależność $\frac{F_x}{F_y} = \frac{v_x}{v_y}$. Wykorzystując tę zależność jesteśmy w stanie wyznaczyć wartości F_x i F_y, które wynoszą odpowiednio $F_x = kv_x^2$ i $F_y = kv_y^2$. Zauważmy w tym miejscu, że pozioma siła oporu F_x nie zmienia nigdy swojego kierunku. Natomiast kierunek siły F_y zmienia się na przeciwny, gdy

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

ciało zaczyna opadać. Aby uwzględnić ten fakt, należy napisać, że $F_y = kv_y^2 \frac{v_y}{|v_y|}$. Czynnik $\frac{v_y}{|v_y|}$ ma bowiem taką własność, że jest równy 1 jeśli v_y jest dodatnie i zmienia wartość na -1, gdy v_y jest ujemne. W związku z powyższym, nasze równania ruchu po podstawieniu wyznaczonych wartości i pomnożeniu przez Δt przyjmują postać

$$\Delta v_x = \left(-\frac{k}{m} v_x^2\right) \Delta t,$$
$$\Delta v_y = \left(-g - \frac{k}{m} \frac{v_y}{|v_y|} v_y^2\right) \Delta t = \left(-g - \frac{k}{m} v_y \cdot |v_y|\right) \Delta t.$$

Jeśli przyrosty czasu Δt będą dążyły do zera, to otrzymamy równania różniczkowe, których rozwiązaniami są pozioma i pionowa składowa prędkości. Nie będziemy jednak z takiego podejścia korzystali, gdyż analityczne rozwiązanie, postawionego w ten sposób problemu, wymaga znajomości rachunku całkowego. Zamiast tego, przeprowadzimy symulację numeryczną z wykorzystaniem arkusza kalkulacyjnego. Zanim jednak do tego przejdziemy, konieczne są równania, które definiują nam trajektorię. W tym przypadku wykorzystamy fakt, że droga jest pochodną prędkości po czasie, co możemy przedstawić jako

$$\Delta x = v_x \, \Delta t,$$
$$\Delta y = v_y \, \Delta t.$$

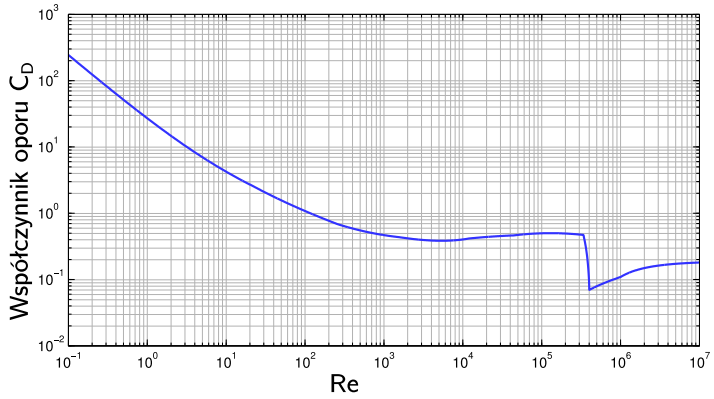
Z przedstawionych zależności wyłania się następująca procedura numeryczna:

1. Określamy wartości początkowe prędkości i położenia oraz numeryczną wielkość pozostałych parametrów pojawiających się w równaniach.
2. Przyjmujemy pewną niewielką wartość Δt.
3. Wyznaczamy przyrosty prędkości $\Delta v_x, \Delta v_y, \Delta x$ i Δy na podstawie danych z poprzedniego kroku.
4. Modyfikujemy wartości v_x, v_y, x i y o wyznaczone przyrosty i przechodzimy do kolejnego kroku symulacji (przechodzimy do kroku 2 niniejszej procedury).

Podstawą symulacji numerycznej jest liczbowa znajomość wszystkich wielkości występujących we wzorach. O ile wiadomo, że $g = 9.81$ m/s^2, piłkę można zważyć, a prędkość początkową założyć, to jak dotąd nie powiedzieliśmy nic o wartości oporu powietrza k. Okazuje się, że dość dobrze opisuje go następujący wzór

$$k = \frac{1}{2} \rho \cdot C_D \cdot A,$$

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.



Rysunek 7.4: Wielkość współczynnika oporu w funkcji liczby Reynoldsa [źródło: Wikipedia].

w którym ρ jest gęstością ośrodka otaczającego poruszające się ciało, A jest powierzchnią przekroju ciała, a C_D jest bezwymiarowym współczynnikiem oporu, zależnym od liczby Reynoldsa. Dokładny wykres wielkości C_D przedstawiony został na Rysunku 7.4. Dla analizowanej przez nas, we wcześniejszym przykładzie, piłki nożnej można przyjąć, że jest on stały podczas całego ruchu i wynosi 0.5. Ponieważ piłka będzie poruszać się w powietrzu, to przyjmujemy $\rho = 1.2$ kg/m^3, a pole przekroju piłki o średnicy 22 cm wynosi $A = \pi(0.11)^2 = 0.038$ m^2. Przyjęte dane numeryczne pozwalają na wyliczenie wartości oporu powietrza $k = 0.0114$ kg/m. Ponadto, na potrzeby naszej analizy zakładamy, że masa piłki wynosi $m = 0.43$ kg, jej prędkość początkowa to $v_0 = 15$ m/s, kąt nachylenia wektora prędkości początkowej do poziomu to 30° (oznacza to, że $v_{x,0} = 12.99$ m/s i $v_{y,0} = 7.5$ m/s), a ruch rozpoczyna się w punkcie $x_0 = 0$ i $y_0 = 0$. Wprowadźmy teraz dane numeryczne do arkusza tak, jak to zostało pokazane na Rysunku 7.5. Wartości oznaczone na pomarańczowo są wartościami początkowymi lub parametrami określającymi piłkę. Właściwa symulacja rozpoczyna się od wiersza numer 15 i trwa do momentu, w którym współrzędna y osiąga wartości nieujemne. Formuły określone dla procesu symulacji są następujące:

- `A15 = A14+B14`,
- `B15 = -($B$6/$B$7)*A15*A15*$B$8`,
- `C15 = C14+D14`,
- `D15 = A15*$B$8`,
- `E15 = E14+F14`,

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

A32 =A31+B31

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	vx0 [m/s]	12,990						
2	vy0 [m/s]	7,500						
3	x0 [m]	0,000						
4	y0 [m]	0,000						
5	g [m/s2]	9,810						
6	k [kg/m]	0,011						
7	m [kg]	0,430						
8	Δt [s]	0,050						
9								
10								
11								
12								
13	vx	Δvx	x	Δx	vy	Δvy	y	Δy
14	12,990	0,000	0,000	0,000	7,500	0,000	0,000	0,000
15	12,990	-0,224	0,000	0,650	7,500	-0,565	0,000	0,375
16	12,766	-0,216	0,650	0,638	6,935	-0,554	0,375	0,347
17	12,550	-0,209	1,288	0,628	6,381	-0,544	0,722	0,319
18	12,341	-0,202	1,915	0,617	5,836	-0,536	1,041	0,292



Rysunek 7.5: Fragment arkusza kalkulacyjnego pozwalający na numeryczną symulację rzutu ukośnego z uwzględnieniem oporów powietrza.

- `F15 = (-$B$5-$B$6/$B$7*E15*ABS(E15))*$B$8`,
- `G15 = G14+H14`,
- `H15 = E15*$B$8`.

Przeprowadzona symulacja pokazuje nam, że jeśli kopniemy piłkę nożną pod kątem 30° z prędkością początkową 15 m/s, to wzniesie się ona na około 3 m oraz upadnie około 16 m dalej.

Ćwiczenie 7.2 Przeprowadź własną symulację dla rzutu ukośnego piłki nożnej. Zobacz, jak zmienia się tor ruchu piłki w sytuacji zmiany kąta i wartości prędkości początkowej. Spróbuj uzyskać dokładniejszy wykres poprzez zmniejszenie wartości Δt. Co stanie się, gdy wartość Δt zwiększy się do 0.1 lub nawet 0.5 s? Jak będzie wyglądała trajektoria ruchu, jeżeli opór powietrza k wzrośnie czterokrotnie (piłka będzie miała 2 razy większą średnicę)? Co się stanie gdy opór powietrza k zmaleje do zera? ■

Ćwiczenie 7.3 Określ wszystkie parametry dla piłki tenisowej i przeprowadź symulację numeryczną dla prędkości początkowych wynoszących około 50 m/s. ■

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

7.4 Podsumowanie

W niniejszym rozdziale przedstawiony został proces podejścia do modelowania matematycznego, na przykładzie rzutu ukośnego. Wybrane przykłady mają pokazywać, że wynik modelowania jest mocno zależny od pewnych uproszczeń, które przyjmiemy. W niektórych przypadkach mogą okazać się one trafne, a w innych doprowadzą do nieścisłości. Na przykład pominięcie oporów ruchu było bardzo sensowne dla strumienia wody. Z kolei pominięcie ich dla ruchu piłki nożnej w powietrzu było uproszczeniem, które daje wynik odbiegający od tego, co będzie się działo w rzeczywistości.

W dobie komputerów posiadających coraz większą moc obliczeniową, modelowanie zjawisk fizycznych zyskuje coraz większe znaczenie. Wynika to z faktu, że eksperyment numeryczny jest znacznie tańszy, niż przeprowadzenie rzeczywistego doświadczenia. Dlatego też, przy projektowaniu maszyn, w pierwszej kolejności symulujemy zachowanie odpowiednich elementów konstrukcyjnych, a dopiero później budujemy prototyp do testów. Bardzo często już na etapie numerycznego symulowania modelu okazuje się bowiem, że konieczne są określone poprawki. Dzięki takiemu podejściu mamy możliwość szybszej realizacji projektu, przy jednoczesnej minimalizacji kosztów związanych z budową i badaniem prototypów.

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.