8. Drgania, fale i analiza Fouriera

Weronika Woś

8.1 Wstęp

Ruch drgający to jeden z najpowszechniejszych ruchów w przyrodzie. Drgają atomy w nas i w całej otaczającej nas materii, drgają struny głosowe ludzi lub zwierząt wydających dźwięk, drgają membrany głośników. Ponadto okazuje się, że każdy ruch drgający można przedstawić jako złożenie (sumę) skończonej lub nieskończonej liczby drgań harmonicznych.

W tym rozdziale przedstawione zostaną podstawowe pojęcia związane z ruchem okresowym. Wyjaśnimy również pojęcia, takie jak: analiza harmoniczna, okres, częstotliwość czy amplituda i omówimy krótko zjawisko energii w ruchu harmonicznym. Nieco szerzej zostanie opisane rozbicie funkcji okresowych na sumę harmonicznych. Natomiast ostatnia część rozdziału przedstawia tak zwany algorytm FFT.

8.2 Ruch okresowy

W codziennym życiu, często można spotkać ruchy powtarzalne, czyli takie, gdzie ciało przemieszcza się tam i z powrotem, wracając co jakiś czas do tego samego punktu. Przykłady takich ruchów to:

- ruch huśtawki,
- drganie struny w instrumencie muzycznym,

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).

Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

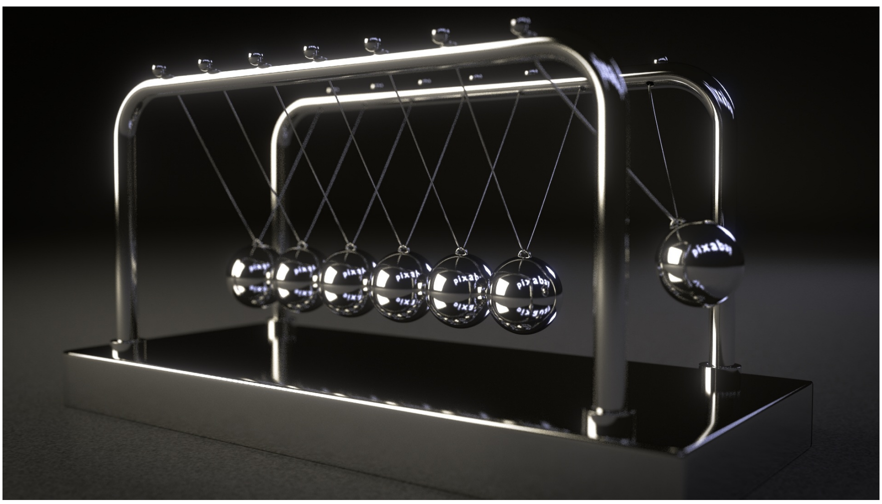
- ciężarek poruszający się na sprężynie,
- drgania szyby obok ruchliwej ulicy.

Taki rodzaj ruchu nazywa się ruchem okresowym.

Definicja 8.1 — Ruch okresowy. Ruch, w którym wielkości charakterystyczne dla tego ruchu, np. prędkość czy przyspieszenie, powtarzają się po upływie stałego przedziału czasu T, nazywa się **ruchem okresowym (harmonicznym, drgającym, oscylacyjnym, cyklicznym)**.

Drgania często dotyczą okresowych zmian innych wielkości, niż położenie ciała, na przykład ciśnienia lub napięcia elektrycznego.

Jeśli drga cząstka ośrodka sprężystego, to drgania te przenoszą się na kolejne cząstki i w ośrodku rozchodzi się fala. W tym rozdziale omówione będą tylko fale w ośrodkach sprężystych. Należy jednak pamiętać, że takimi samymi równaniami można opisać wiele zjawisk falowych: od fal rozchodzących się w strunie, poprzez fale dźwiękowe, aż do całej klasy fal elektromagnetycznych. W istocie każda poruszająca się cząstka jest falą, tak więc równanie falowe spełnia fundamentalną rolę w opisie świata.



Rysunek 8.1: Wahadło Newtona jest ciekawym przykładem ruchu okresowego

■ **Przykład 8.1** Ciekawym przykładem ruchu okresowego jest kołysanie się kulek, w tak zwanym wahadle Newtona. Jest ono zbudowane w ten sposób, że na sznurkach zawieszonych jest 5 stykających się ze

Norway grants

Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).

Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

sobą stalowych kulek, które mogą wykonywać wahania tylko w jednej, wspólnej płaszczyźnie. Gdy jedna z nich zostanie odchylona i puszczona, jej uderzenie w pozostałe kulki spowoduje, że po przeciwnej stronie szeregu odskoczy tylko ostatnia kulka, a pozostałe pozostaną nieruchome. Wychylenie odskakującej kulki będzie prawie takie samo jak pierwszej. ■

Ruch punktu materialnego nazywa się ruchem harmonicznym, jeśli punkt porusza się pod wpływem siły F, o wartości wprost proporcjonalnej do wychylenia z położenia równowagi x i skierowanej przeciwnie do wychylenia. O zwrocie siły mówi znak minus we wzorze

$$F = -k\,x,$$

gdzie k jest współczynnikiem proporcjonalności. Jeżeli siłę harmoniczną podstawi się do równania wyrażającego II zasadę dynamiki Newtona

$$F = m\,a,$$

gdzie m jest to masa ciała, a $a = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}\,t^2}$ jest przyspieszenieniem, to otrzyma się następujące równanie

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}\,t^2} = -k\,x. \tag{8.1}$$

Jest to równanie różniczkowe zwyczajne drugiego rzędu z niewiadomą funkcją x. Szukaną funkcją (rozwiązaniem tego równania) jest taka funkcja, której druga pochodna ma tą samą postać, co sama funkcja x z przeciwnym znakiem (z dokładnością do stałej). Funkcjami takim są sinus i cosinus. Te funkcje trygonometryczne nazywa się **funkcjami harmonicznymi**, a opis ruchu okresowego przy ich pomocy jest to analiza harmoniczna.

Definicja 8.2 — Analiza harmoniczna. Opis ruchu okresowego przy pomocy funkcji trygonometrycznych sinus i cosinus nazywa się **analizą harmoniczną**.

Rzeczywiście równanie (8.1) jest spełnione przez funkcję

$$x(t) = A\cos(\omega \cdot t + \varphi),$$

gdzie A, ω, φ są dowolnymi parametrami. Poniżej przedstawiono pierwszą pochodną (prędkość) oraz drugą pochodną x po czasie t

Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Norway grants
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

(przyspieszenie).

$$\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = -\omega\,A \sin\left(\omega \cdot t + \varphi\right) \qquad \text{prędkość}$$
$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}\,t^2} = -\omega^2\,A \cos\left(\omega \cdot t + \varphi\right) \qquad \text{przyspieszenie}$$

Po podstawieniu do równania 8.1 uzyskuje się równanie:

$$m \cdot \left(-\omega^2\,A \cos\left(\omega \cdot t + \varphi\right)\right) = -k \cdot A \cos(\omega \cdot t + \varphi).$$

Funkcja $x(t) = A\cos(\omega \cdot t + \varphi)$ spełnia równanie ruchu pod warunkiem, że stała ω spełnia związek:

$$m\,\omega^2 = k. \tag{8.2}$$

Definicja 8.3 Stałą ω nazywa się **częstością** drgań własnych. Argument funkcji cosinus $(\omega \cdot t + \varphi)$ to **faza ruchu**, stała φ stanowi **fazę początkową** w chwili $t = 0$. Największe wychylenie z położenia równowagi A nazywa się **amplitudą drgań**.

8.3 Okresowość drgań

Na początku należy przypomnieć, że funkcje sinus i cosinus są okresowe. To znaczy, że dla pewnej stałej T_0, zwanej okresem tych funkcji, wartości funkcji dla argumentu $x + T_0$ są takie same jak dla argumentu x. Jeżeli istnieje najmniejszy dodatni okres, to nazywa się go okresem podstawowym. Okresem podstawowym funkcji sinus i cosinus jest 2π, tzn.:

$$\cos\left(\alpha + 2\pi\right) = \cos\alpha.$$

Ruch oscylacyjny ma tę własność, że po upływie pewnego czasu T zwanego **okresem** ruchu, ciało znów jest w tej samej fazie.

Przy założeniu, że $\omega\ T = 2\pi$, oraz korzystając z okresowości funkcji cosinus otrzymuje się, że:

$$\begin{aligned} x(t+T) &= A\cos(\omega \cdot (t+T) + \varphi) = A\cos(\omega t + \omega T + \varphi) \\ &= A\cos((\omega t + \varphi) + \omega T) = A\cos(\omega t + \varphi) = x(t). \end{aligned}$$

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli"
współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

Twierdzenie 8.1 Okres ruchu T jest powiązany z częstością ω w następujący sposób

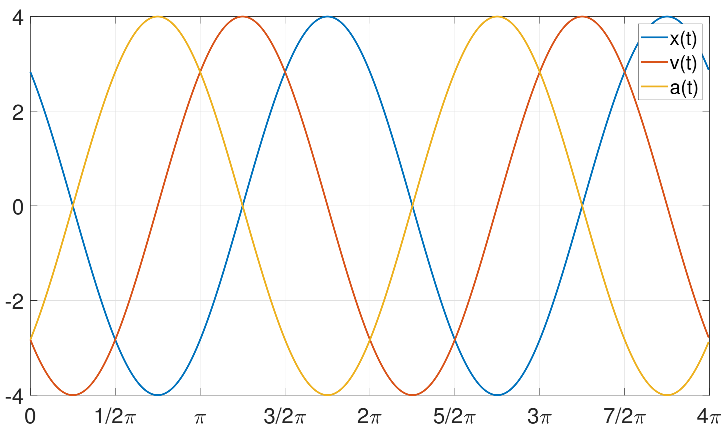
$$\omega T = 2\pi \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Definicja 8.4 Odwrotność okresu T, czyli liczbę drgań w jednostce czasu nazywa się **częstotliwością** i oznacza się ν. Jednostką częstotliwości jest hertz: $1Hz = 1s^{-1}$.

Twierdzenie 8.2 Częstotliwość ν i częstość ω są powiązane zależnościami

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \qquad \omega = 2\pi\nu$$

Rysunek 8.2 przedstawia funkcje położenia $x(t)$, prędkości $v(t)$ oraz przyspieszenia $a(t)$ od czasu w ruchu oscylacyjnym (przy założeniu, że $\omega = 1$, $A = 4$ oraz $\varphi = \pi/4$). W momentach, gdy wychylenie z położenia równowagi jest maksymalne $x = A$, prędkość jest równa zeru, natomiast przyspieszenie ma wartość maksymalną, a znak przeciwny do wychylenia. Gdy drgające ciało znajduje się w położeniu równowagi $x = 0$, przyspieszenie jest zerowe, a prędkość maksymalna.



Rysunek 8.2: Zależność położenia, prędkości i przyspieszenia od czasu w ruchu harmonicznym

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

8.4 Energia w ruchu harmonicznym

Ciało wychylone z położenia równowagi, na które działa siła harmoniczna, ma pewną **energię potencjalną** E_p.

Definicja 8.5 — Energia potencjalna. Energia, jaką ma ciało (lub układ ciał) w zależności od położenia ciała (układu ciał) w przestrzeni, jest to **energia potencjalna**, oznaczana jako E_p.

Energię tę można wyznaczyć, obliczając pracę, jaką należy wykonać, aby przesunąć ciało z położenia równowagi, $x = 0$ do punktu o danym położeniu. Zmiana energii potencjalnej $\mathrm{d}\,E_p$ jest równa pracy, jaką wykonuje siła równoważąca siłę harmoniczną na drodze $\mathrm{d}\,x$.

$$\mathrm{d}\,E_p = -F(x)\,\mathrm{d}\,x,$$

gdzie $F(x) = -k\,x$. Zatem

$$\mathrm{d}\,E_p = k\,x\,\mathrm{d}\,x.$$

Po obliczeniu całki

$$E_p(x) = \int\limits_0^x k\,s\,\mathrm{d}\,s$$

otrzymuje się wzór na energię potencjalną ciała wychylonego z położenia równowagi o x:

$$E_p(x) = \frac{1}{2}k\,x^2.$$

Twierdzenie 8.3 Ciało w ruchu harmonicznym ma energię potencjalną, którą można wyrazić wzorem

$$E_p(t) = \frac{1}{2}k\,x^2 = \frac{1}{2}k\,A^2\cos^2{(\omega t + \varphi)}.$$

Ponadto ciało w ruchu drgającym ma energię związaną z ruchem jego masy. Jest to **energia kinetyczna**, oznaczana E_k. W opisywanych przez mechanikę klasyczną układach, może dochodzić do przemian energii kinetycznej w energię potencjalną i odwrotnie.

Definicja 8.6 — Energia kinetyczna. Energia ciała związana z ruchem jego masy jest to **energia kinetyczna**, oznaczana E_k.

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

Wzór na energię kinetyczną w ruchu harmonicznym oblicza się, podstawiając do wzoru na energię kinetyczną

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

prędkość w postaci

$$v = -\omega\, A\, \sin(\omega t + \varphi)$$

otrzymując

$$E_k = \frac{1}{2} m\, \omega^2\, A^2\, \sin^2(\omega t + \varphi).$$

Ponadto korzystając z zależności (8.2) otrzymuje się następujący wzór:

$$E_k = \frac{1}{2} k\, A^2\, \sin^2(\omega t + \varphi).$$

Twierdzenie 8.4 Ciało w ruchu harmonicznym ma energię kinetyczną, którą można wyrazić wzorem

$$E_k = \frac{1}{2} k\, A^2\, \sin^2(\omega t + \varphi).$$

Energia całkowita ciała poruszającego się ruchem oscylacyjnym to suma energii potencjalnej i kinetycznej.

$$\begin{aligned} E = E_p + E_k &= \frac{1}{2} k\, A^2\, \cos^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2} k\, A^2\, \sin^2(\omega t + \varphi) \\ &= \frac{1}{2} k\, A^2\, \left(\cos^2(\omega t + \varphi) + \sin^2(\omega t + \varphi)\right) = \frac{1}{2} k\, A^2. \end{aligned}$$

Jak łatwo zauważyć, we wzorze na energię całkowitą znikło wyrażenie zależne od czasu. Oznacza to, że energia całkowita w ruchu harmonicznym nie zależy od czasu – jest w każdej chwili taka sama. Inaczej mówiąc, energia całkowita jest zachowana. Zmieniają się natomiast energie: kinetyczna i potencjalna. Zachodzi to w ten sposób, że gdy jedna z nich rośnie, to druga maleje tak, że suma pozostaje stała.

8.5 Szereg Fouriera

Często spotykanym zadaniem jest aproksymacja funkcji $x(t)$. Zadanie to polega na przybliżeniu funkcji $x(t)$ w innej, zazwyczaj prostszej,

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

postaci $\phi(t)$. Bardzo często mówi się o tak zwanej aproksymacji wielomianowej, gdzie szukana funkcja $\phi(t)$ jest wielomianem. Jeśli jednak funkcja $x(t)$ jest okresowa, to wówczas do jej aproksymacji lepiej użyć wielomianów trygonometrycznych, tj. rozwinąć funkcję w **szereg trygonometryczny Fouriera**.

Twierdzenie 8.5 Jeżeli funkcja $x(t)$ jest **okresowa** to można ją rozwinąć w **szereg trygonometryczny Fouriera** dany wzorem:

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \Big[A_k \cos(k\omega t) + B_k \sin(k\omega t) \Big],$$

gdzie:
k to rząd harmonicznej,
A_0 to składowa stała,
A_k, B_k to amplitudy,
$\omega = 2\pi f$ to pulsacja harmonicznej podstawowej (częstość).

Zatem szereg Fouriera rozkłada funkcję okresową na sumę funkcji trygonometrycznych. W ogólnym przypadku szereg Fouriera zawiera nieskończenie wiele harmonicznych (składowych sumy szeregu). W praktyce jednak większość harmonicznych maleje do zera, gdy zwiększa się rząd tych harmonicznych. Dlatego też w obliczeniach uwzględnia się kilka początkowych składowych, uzyskując przy tym zadowalające przbliżenie.

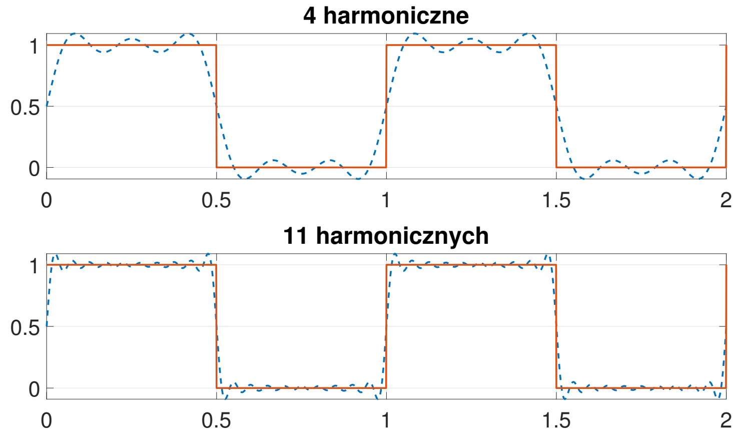
■ **Przykład 8.2** Dany jest sygnał prostokątny następującym wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad (n, 0,5+n) \\ 1/2 & \text{dla} \quad 0,5+n \\ 0 & \text{dla} \quad (0,5+n, n+1) \end{cases},$$

gdzie $n \in \mathbb{Z}$.

Rysunek 8.3 przedstawia wykres tego sygnału oraz jego przybliżenia szeregiem Fouriera odpowiednio przez 4 i 11 pierwszych harmonicznych. Łatwo zaobserwować, że każde zwiększenie liczby harmonicznych w rozwinięciu w szereg Fouriera zwiększa dokładność odwzorowania sygnału.

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.



Rysunek 8.3: Reprezentacja sygnału prostokątnego przez sumę harmonicznych

■

Często postać trygonometryczna szeregu Fouriera nie jest wystarczająca, dlatego wprowadza się **postać wykładniczą szeregu Fouriera**. Korzystając ze wzorów Eulera i dokonując przekształceń otrzyma się zależność:

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k\, e^{ik\omega t},$$

gdzie współczynniki X_k rozwinięcia są liczbami zespolonymi. Wykres $|X_k|$ nazywany jest **widmem amplitudowym** sygnału $x(t)$, jest on symetryczny względem osi pionowej. Z kolei wykres $\arg X_{-k} = -\arg X_k$ jest nazywany **widmem fazowym** i jest symetryczny względem początku układu współrzędnych.

8.6 Transformacja Fouriera

Szereg Fouriera odnosi się tylko do sygnałów okresowych. Uogólnieniem szeregu, na przypadek sygnałów nieokresowych, jest **transformacja Fouriera**.

Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Norway grants
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

Definicja 8.7 **Transformacja Fouriera** jest dana wzorem:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} \mathrm{d}t. \tag{8.3}$$

Jest to transformacja sygnału ciągłego, oznaczana CTFT (Continuous Time Fourier Transform).

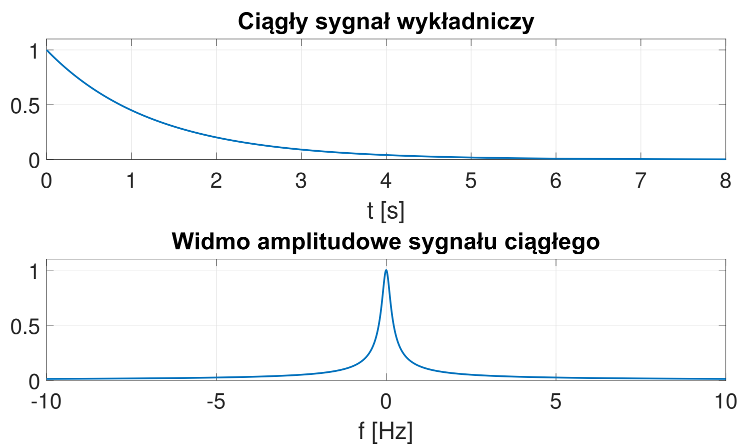
■ **Przykład 8.3** Niech będzie dany sygnał wykładniczy opisany funkcją ciągłą

$$x(t) = e^{-0{,}8\,t}.$$

Transformacja Fouriera tej funkcji obliczona zgodnie ze wzorem (8.3) wynosi

$$X(\omega) = 1/(0,8 + i\omega).$$

Rysunek 8.4 ilustruje wykres tego sygnału w dziedzinie czasu oraz widmo amplitudowe tego sygnału.



Rysunek 8.4: Ciągły sygnał wykładniczy i widmo amplitudowe tego sygnału

■

Transformacja CTFT zakłada, że sygnał jest ciągły. W praktyce jednak, w większości spotyka się z próbkami dyskretnymi sygnału.

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli"
współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

Transformację takiego sygnału oznacza się DTFT (Discrete Time Fourier Transform). Definicja tego przekształcenia wynika wprost z definicji transformacji ciagłej przez zastąpienie czasu ciągłego dyskretnymi próbkami, a całkowanie przez sumowanie.

Definicja 8.8 **Transformacja DTFT** opisana jest wzorem:

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-i\omega\, n\, T}. \tag{8.4}$$

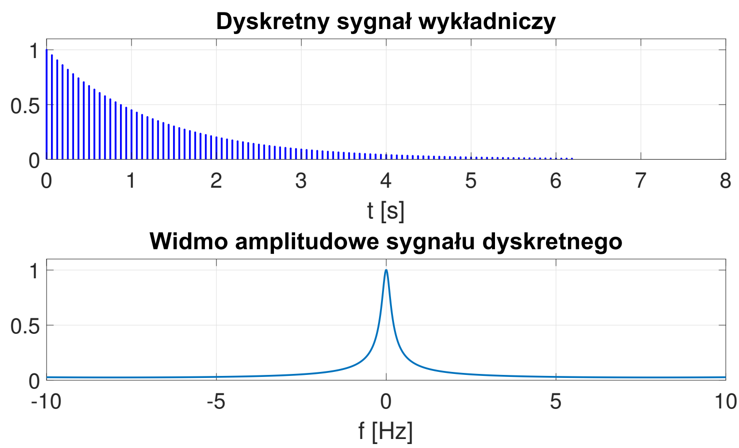
■ **Przykład 8.4** Ciągła funkcja wykładnicza opisana w Przykładzie 8.3 ma reprezentację dyskretną

$$x(n) = e^{-0{,}8\, T_s n}.$$

Wtedy widmo sygnału spróbkowanego obliczone zgodnie ze wzorem (8.4) opisuje wyrażenie

$$X(\omega) = 1/(1 - e^{-0{,}8\, T_s - i\, 2\pi\, f\, T_s}).$$

Rysunek 8.5 przedstawia wykres tego sygnału i jego widma. Wynik transformaty Fouriera sygnału spróbkowanego odzwierciedla przebieg charakterystyki częstotliwościowej sygnału ciągłego.



Rysunek 8.5: Dyskretny sygnał wykładniczy i widmo amplitudowe tego sygnału

■

Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

Transformacja Fouriera omówiona do tej pory przetwarza sygnał wejściowy ciągły lub dyskretny w reprezentację częstotliwościową ciągłą. W analizie cyfrowej pożądana jest postać dyskretna wyniku. Rozwiązaniem tego problemu jest dyskretyzacja wyników DTFT. Tę rolę pełni **dyskretna transformacja Fouriera** DFT (Discrete Fourier Transform).

Definicja 8.9 Dla sygnału dyskretnego $x(n)$ **dyskretna transformacja Fouriera** DFT przyjmuje postać

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_n^{kn}, \tag{8.5}$$

gdzie

$$W_N = e^{-i\,2\pi/N} = \cos(2\pi/N) - i\sin(2\pi/N).$$

Przekształcenie DFT jest zdyskretyzowanym po częstotliwości wynikiem przekształcenia Fouriera ciągu dyskretnego. Główną zaletą DFT jest zastąpienie obliczeń z użyciem typu ciągłego, operacjami mnożenia i sumowania na wartościach dyskretnych, które są łatwe do zaprogramowania na komputerze. Użycie dyskretnej transformaty Fouriera, w porównaniu do ciągłego przekształcenie Fouriera, niesie za sobą szereg możliwości. Współczesne systemy pomiarowe są urządzeniami cyfrowymi, a zatem sygnał zmierzony przy ich pomocy przyjmuje wartości dyskretne.

8.7 Algorytm FFT

Transformacja zdefiniowana wzorem (8.5) wymaga wykonania dużej liczby operacji matematycznych. Mając bardzo dużą liczbę próbek pomiarowych, oznacza to istotne ograniczenie jej zastosowania. Istnieje jednak algorytm szybkiego obliczania dyskretnej transformaty Fouriera, który optymalizuje DFT, zwany **szybką transformatą Fouriera FFT** (Fast Fourier Transform). Za pomocą transformaty Fouriera, a w praktyce za pomocą **algorytmu FFT**, przekształca się sygnał z dzidziny czasu do dziedziny częstotliwości.

W wyniku transformaty otrzymuje się informację o amplitudzie i fazie poszczególnych składowych częstotliwościowych. Wśród zalet FFT można wymienić, między innymi możliwość zastosowania do programów procesorów sygnałowych, czy programów matematycznych. Dzięki temu szybka transformata Fouriera jest obecnie najbardziej

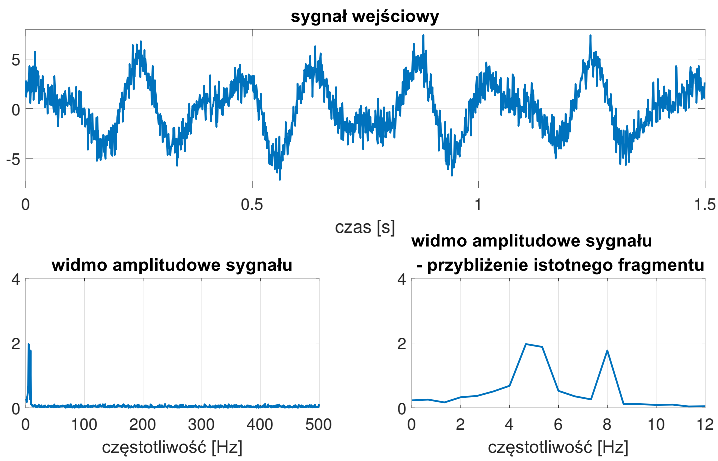
Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.

popularną operacją przetwarzania sygnałów.

■ **Przykład 8.5** Niech będzie dany sygnał wyrażony funkcją

$$f(x) = 3\sin(2\pi\, 5t) + 2\cos(2\pi\, 8t),$$

do którego został dodany szum losowy. Częstotliwości występujące w funkcji oryginalnej to 5 Hz i 8 Hz. Rysunek 8.6 przedstawia ten sygnał oraz jego szybką transformatę Fouriera FFT. Częstotliwości występujące w funkcji oryginalnej to 5 Hz i 8 Hz. Pierwszy wykres przedstawia oryginalny sygnał. Wykres w drugim wierszu od lewej prezentuje cały wynik analizy FFT. Można zaobserwować istotne częstotliwości na początku wykresu, następnie reszta widma jest bliska zera. Trzeci wykres jest przybliżeniem początkowego fragmentu drugiego wykresu i uwidacznia częstotliwości istotne. Jak widać, analiza FFT bardzo dobrze odzwierciedla istotne częstotliwości. Na trzecim wykresie występuje znaczne wzniesienie krzywej między 4 Hz a 6 Hz, co odpowiada częstotliwości 5 Hz. Ponadto występuje bardzo wyraźne ekstremum w 8 Hz. Zatem analiza FFT dała bardzo dokładne wyniki na mocno zaszumionym sygnale.



Rysunek 8.6: Zaszumiony sygnał oryginalny i jego transformata FFT

■

Norway grants
Projekt pt.: „MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA – Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli" współfinansowany jest ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz Budżetu Państwa (15%).
Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.