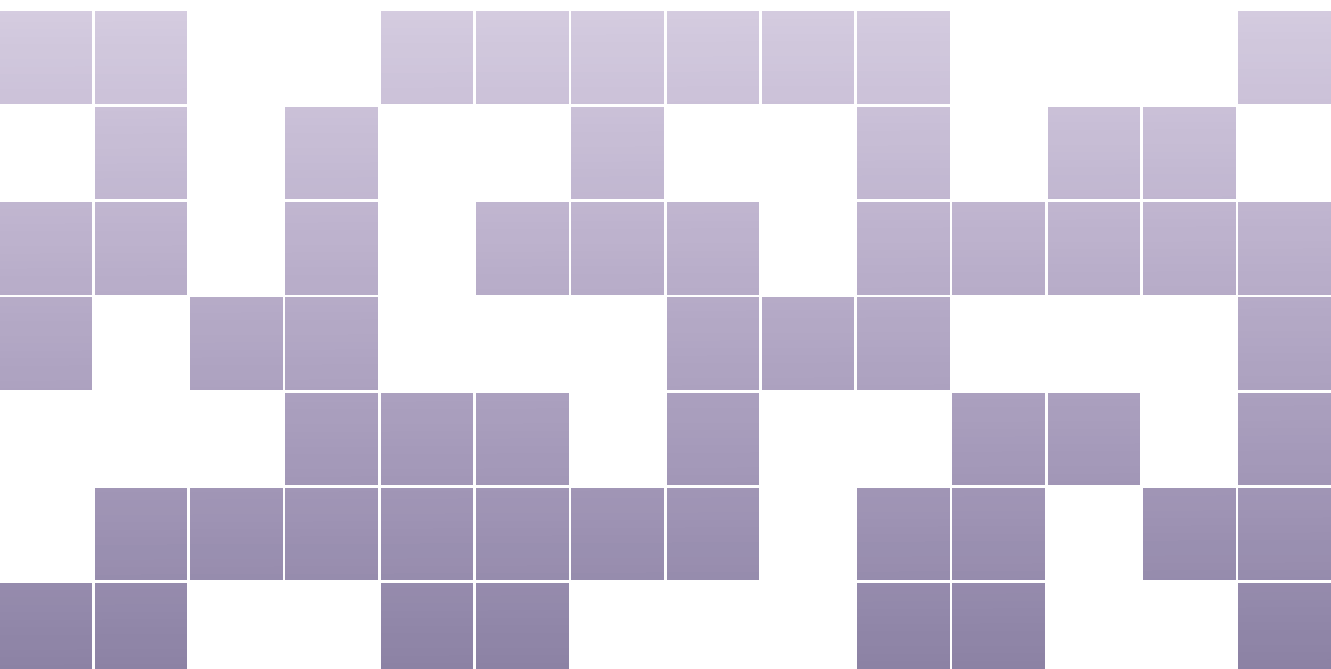


# Zastosowania nauki

Tom 2

**Fizyka**

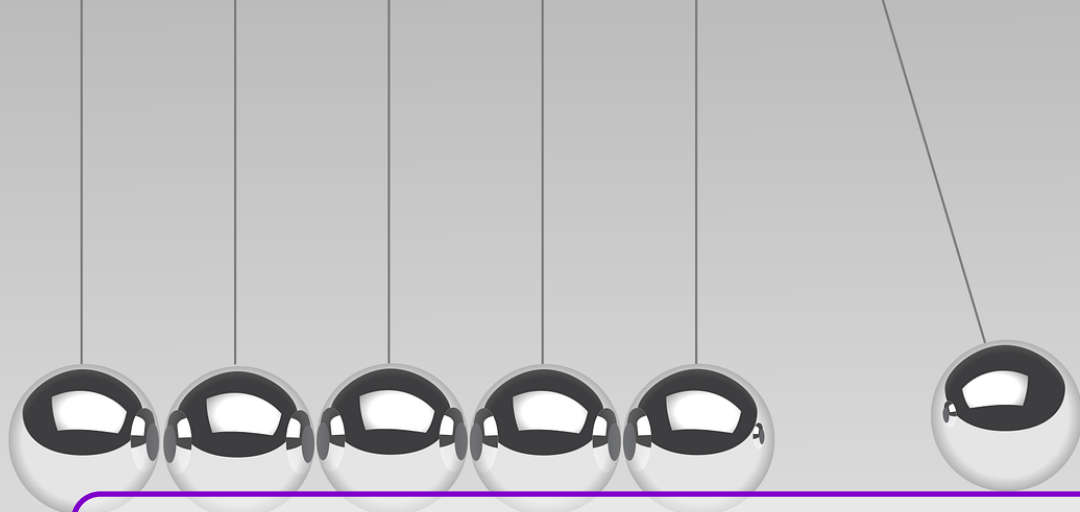




Projekt pt.: „**MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA - Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli**”, o wartości 15 328 498,86 zł, realizowany jest w ramach Programu Rozwój Lokalny. Projekt dofinansowany został ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz ze środków Budżetu Państwa (15%). Projekt ma na celu poprawę rozwoju lokalnego i instytucjonalnego Stalowej Woli. Projektem zarządza Lider – Gmina Stalowa Wola.

**Wspólnie działamy na rzecz Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.**  
[www.norwaygrants.pl](http://www.norwaygrants.pl) i [www.norwaygrants.org](http://www.norwaygrants.org)

Materiały dydaktyczne opracowane w ramach projektu  
"MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA –  
Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli".



## Spis treści

<b>1</b>	<b>Dlaczego samolot lata?</b> .....	<b>7</b>
1.1	Wstęp .....	7
1.2	Aerodynamika .....	8
1.3	Ćwiczenia .....	10
1.4	Sterowanie samolotem .....	12
1.5	Co to jest awionika pokładowa i do czego służy? .....	16
1.6	Podsumowanie .....	20
<b>2</b>	<b>Tarcie dobre i złe</b> .....	<b>21</b>
2.1	Wstęp .....	21
2.2	Czynniki wpływające na tarcie .....	22
2.3	Tarcie, czyli zło konieczne .....	25
2.4	Co wpływa na tarcie? .....	27
2.5	Zwiększanie i redukowanie tarcia .....	29
<b>3</b>	<b>Siła gazów</b> .....	<b>33</b>
3.1	Wstęp .....	33
3.2	Silniki parowe .....	34
3.3	Turbiny parowe .....	36
3.4	Tłokowe silniki spalinowe .....	37
3.5	Silniki odrzutowe, turbopłowe, strumieniowe .....	42



3.6	Silniki rakietowe	44
<b>4</b>	<b>Ciało w ruchu</b>	<b>45</b>
4.1	Wstęp	45
4.2	Prędkość	46
4.3	Jednostki	47
4.4	Określanie prędkości	48
4.5	Pomiary prędkości	48
4.6	Wybór najlepszej metody	51
4.7	Odległość a przemieszczenie	52
4.8	Szybkość a prędkość	53
4.9	Obliczanie prędkości i szybkości	54
4.10	Optymalne wykorzystanie jednostek	56
4.11	Wykresy przemieszczenia w czasie	56
4.12	Wyprowadzanie prędkości z wykresu przemieszczenia w czasie	58
4.13	Łączenie przemieszczeń	59
<b>5</b>	<b>Właściwości materiałów i ich badanie</b>	<b>63</b>
5.1	Wprowadzenie	63
5.2	Właściwości mechaniczne materiałów	64
5.3	Statyczna próba rozciągania	65
5.4	Próby twardości materiałów	67
5.5	Pomiar udarności materiałów	69
5.6	Badania zmęczeniowe materiału	70
5.7	Właściwości technologiczne metali i ich stopów	71
5.8	Ćwiczenie do samodzielnego wykonania	73
<b>6</b>	<b>Statystyka dla fizyka</b>	<b>75</b>
6.1	Wstęp	75
6.2	Statystyka, a prawdopodobieństwo	76
6.3	Pomiary fizyczne i wyznaczanie podstawowych statystyk	77
6.4	Rozkład normalny i błędy pomiarowe	80
6.5	Podsumowanie	85

---

<b>7</b>	<b>Czym jest modelowanie?</b> .....	<b>87</b>
7.1	Wstęp .....	87
7.2	Modelowanie rzutu ukośnego .....	88
7.3	Rzut ukośny z oporem powietrza .....	90
7.4	Podsumowanie .....	96
<b>8</b>	<b>Drgania, fale i analiza Fouriera</b> .....	<b>97</b>
8.1	Wstęp .....	97
8.2	Ruch okresowy .....	97
8.3	Okresowość drgań .....	100
8.4	Energia w ruchu harmonicznym .....	102
8.5	Szereg Fouriera .....	103
8.6	Transformacja Fouriera .....	105
8.7	Algorytm FFT .....	108







# 1. Dlaczego samolot lata?

*Andrzej Łączek*

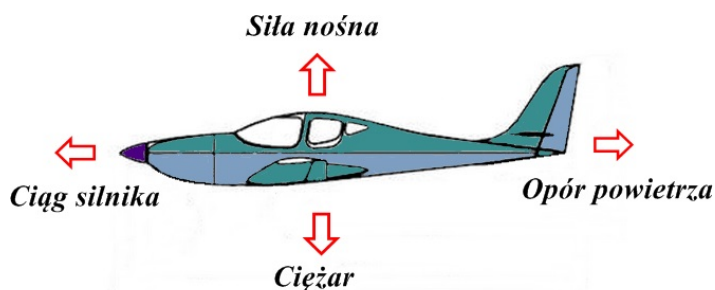
## 1.1 Wstęp

Skonstruowanie maszyny, która mogłaby wznieść się w powietrze było dla człowieka, od setek lat, czymś niemożliwym do wykonania. Pierwsze próby stworzenia maszyny latającej podejmował, już w XV wieku, znany wszystkim wynalazca i konstruktor Leonardo da Vinci. Wielu twierdziło, że zbudowanie maszyny latającej, cięższej od powietrza, jest sprzeczne z prawami fizyki. Po wielu latach okazało się, że nie trzeba łamać praw fizyki, tylko lepiej je poznać i odpowiednio wykorzystać. Udowodnili to w 1903 roku bracia Wright, którzy po raz pierwszy wzbili się swoim samolotem w powietrze i przelecieli dystans 37 metrów. Od tego momentu rozwój lotnictwa postępował niemalże z dnia na dzień. W Europie pionierem lotnictwa był Francuz Louis Bleriot. Przeleciał on w 1909 roku nad kanałem La Manche, pokonując dystans 41 km. Dziś nie dziwi już nikogo widok samolotu lecącego z prędkością prawie 1000 km/h, na wysokości kilku lub nawet kilkunastu kilometrów i pozostawiającego na niebie białe smugi. Jak to się dzieje, że samolot ważący nawet kilkaset ton (najcięższy samolot świata, Antonow An-225 Mrija, posiadał masę startową 640 ton) potrafi wzbic się w powietrze i przelecieć na inny kontynent w kilka godzin. Jak to jest możliwe?



## 1.2 Aerodynamika

Spójrzmy na to od strony fizyki i zastanówmy się, jakie siły działają na samolot? Po pierwsze, najbardziej niekorzystną siłą, jaka działa na samolot, jest **siła ciężkości** związana z grawitacją i ciężarem maszyny (rys. 1.1). Siła ta jest skierowana w dół i „ciągnie” samolot ku Ziemi.



Rysunek 1.1: Siły działające na samolot

Aby samolot unosił się w powietrzu musi działać na niego tak zwana **siła nośna**, zwrócona przeciwnie do siły ciężkości, czyli do góry. Siła ta musi przewyciężyć siłę ciężkości. Kluczową rolę odgrywają tu skrzydła samolotu, ich kształt i profil. Skrzydła stanowią główny element konstrukcyjny samolotu i to właśnie na nich wytwarzana jest siła nośna. Powstaje ona na skutek ruchu powietrza względem, odpowiednio wyprofilowanych, skrzydeł samolotu, nachylonych do kierunku lotu pod pewnym kątem, zwanym kątem natarcia (rys. 1.2).



Rysunek 1.2: Rozkład sił działających na skrzydło samolotu

Chcąc stworzyć urządzenie, które wytworzy siłę nośną znacznie przewyższającą siły oporu, należy przede wszystkim odpowiednio ukształ-

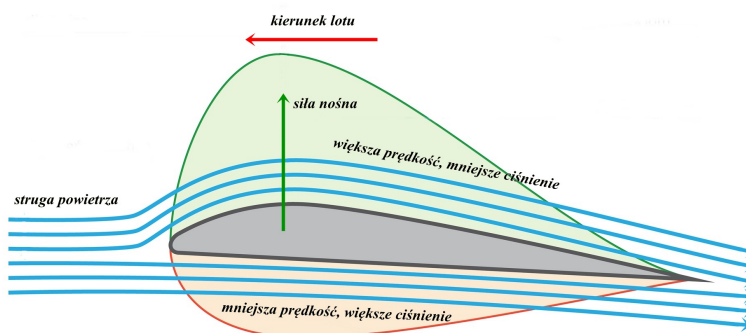


tować opływającą powierzchnię. Kształty, które spełniają to wymaganie nazywa się **profilami aerodynamicznymi**. W przekroju, skrzydło ma kształt profilu lotniczego, pokazanego na rysunku 1.3.



Rysunek 1.3: Przykładowy profil skrzydła lotniczego

Z praw fizyki wiemy, że cząsteczki powietrza przemieszczają się zawsze z miejsca o wyższym ciśnieniu do miejsca o niższym ciśnieniu. Opływające skrzydło powietrze dzieli się na dwie strugi, z których jedna przepływa nad skrzydłem samolotu, a druga pod skrzydłem. Powietrze opływające skrzydło od góry przebywa dłuższą drogę, porusza się więc z większą prędkością, niż powietrze opływające skrzydło z dołu. Powietrze, które ma większą prędkość, czyli na górze skrzydła, będzie wytwarzało mniejsze ciśnienie statyczne, niż powietrze na dole. W związku z czym, ciśnienie u dołu skrzydła mocniej napiera na skrzydło, niż ciśnienie z góry skrzydła. W rezultacie otrzymujemy potrzebną do lotu siłę nośną, która jest bezpośrednio wynikiem ciśnień, występujących na i pod powierzchnią skrzydła (rys. 1.4).



Rysunek 1.4: Nad skrzydłem strumień powietrza porusza się szybciej niż pod skrzydłem

Aby wytworzyć taką siłę, konieczny jest więc ruch powietrza opływającego skrzydła. Dlatego samolot, aby wznieść się w powietrze, najpierw musi nabrać odpowiednio dużej prędkości. Jest to realizowane przy pomocy silników, które wytwarzają konieczną do napędu

samolotu siłę ciągu i napędzają samolot zarówno podczas startu, jak i całego lotu. Siła ciągu musi być na tyle duża, aby przewyciężyć siły oporu i rozpędzić samolot do odpowiedniej prędkości. Zatem zgodnie z zasadą względności ruchu, jeśli samolot porusza się w jednym kierunku, to powietrze przesuwa się w przeciwną stronę. Tak więc jednym z najważniejszych czynników, wpływających na siłę nośną jest ruch powietrza z obu stron skrzydeł. Zatem w największym uproszczeniu - powietrze opływające skrzydło dzieli się zasadniczo na dwa strumienie, z których jeden przepływa nad profilem, a drugi pod nim. Jeżeli powietrze na górze ma do przebycia inną drogę, niż na dole (z powodu różnicy geometrii), będzie to skutkowało występowaniem różnej prędkości powietrza w obu strumieniach. Różnica prędkości oznacza z kolei różnicę ciśnień, a ta powoduje wystąpienie siły nośnej, nazywanej też siłą aerodynamiczną.

Na podstawie znajomości tego zjawiska możemy wnioskować, iż siły aerodynamiczne, działające na skrzydła samolotu zależą od:

- kształtu profilu oraz jego ustawienia względem kierunku opływu,
- powierzchni skrzydła,
- gęstości powietrza,
- prędkości lotu.

Innym ważnym czynnikiem jest nachylenie skrzydeł w stosunku do opływającego je powietrza. Ponieważ skrzydła samolotu nachylone są do kierunku lotu pod pewnym kątem, zwanym kątem natarcia, to w wyniku tego, napływające powietrze zmienia swój pęd w kierunku prostopadłym do tego ruchu.

## 1.3 Ćwiczenia

W oparciu o powyższe informacje zrobimy kilka doświadczeń i zaobserwujemy, jak zachowują się kartki papieru, gdy wymusimy szybszy przepływ powietrza po jednej stronie kartki. Materiały potrzebne do wykonania ćwiczeń to dwie kartki papieru, kilka książek oraz suszarka do włosów, czyli przedmioty, które na pewno masz w swoim domu.

### Ćwiczenie 1.1

**Przebieg:** lekko wygiętą kartkę papieru umieszczamy tak, aby większa jej część zwisała swobodnie w dół. Dmuchamy silnie wzdłuż górnej powierzchni kartki w kierunku poziomym i widzimy, że kartka unosi się w górę (rys. 1.5). Dlaczego tak się dzieje?

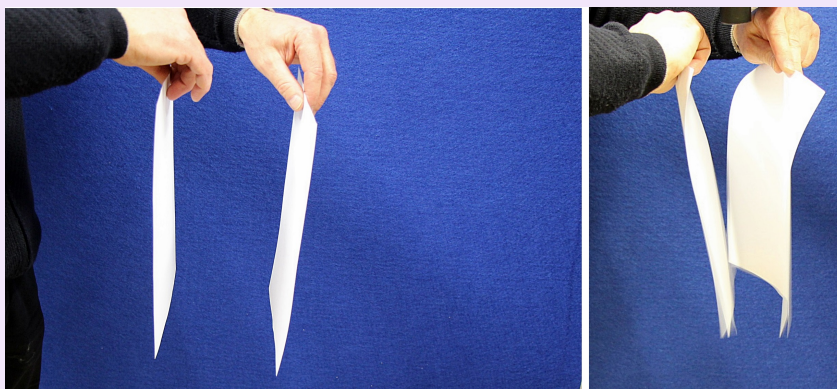


Rysunek 1.5: Ćwiczenie 1

**Objaśnienie:** jeśli dmuchamy na kartkę od góry poziomo to ciśnienie statyczne u góry jest małe i kartka podnosi się do góry. Między innymi ten efekt powoduje, że samolot unosi się do góry. ■

### Ćwiczenie 1.2

**Przebieg:** dwie kartki papieru trzymamy obok siebie tak, aby zwiślały pionowo w dół. Silnie dmuchamy między kartki. Widzimy, że kartki zbliżają się do siebie (rys. 1.6). Dlaczego tak się dzieje?



Rysunek 1.6: Ćwiczenie 2

**Objaśnienie:** kiedy dmuchamy między dwie kartki to między nimi wytwarzane jest małe ciśnienie statyczne, a ciśnienie atmosferyczne z zewnętrznej strony ściska kartki do siebie. ■

### Ćwiczenie 1.3

**Przebieg:** kartkę papieru kładziemy płasko na dwóch podporach. Dmuchaemy silnie pod kartkę i widzimy, że kartka wygina się do dołu (rys. 1.7). Dlaczego tak się dzieje?



Rysunek 1.7: Ćwiczenie 3

**Objaśnienie:** w momencie, gdy dmuchamy pod kartkę wytwarza się pod nią małe ciśnienie statyczne i kartka przyciskana jest do dołu, przez wyższe ciśnienie na górnej powierzchni kartki. ■

Doświadczenia te obrazują zjawisko występowania różnicy ciśnień po obu stronach kartki, spowodowane szybciej przepływającym powietrzem po jednej ze stron. Prawo fizyki, dzięki któremu tak się dzieje, to **prawo Bernoulliego**. Jest ono podstawowym prawem fizyki, które znajduje zastosowanie w lotnictwie.

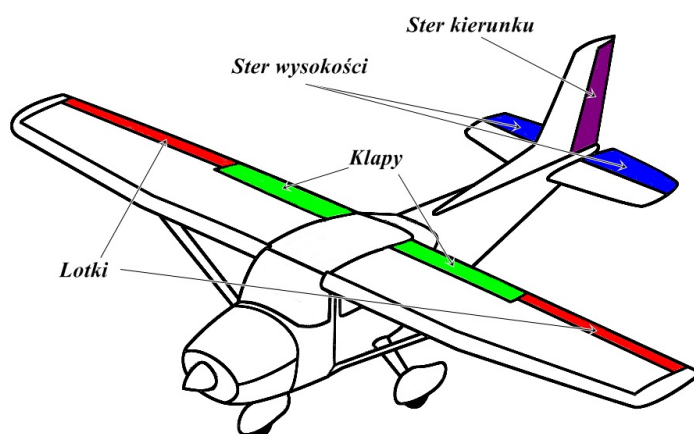
**Definicja 1.1 — Prawo Bernoulliego.** Mówi nam, że suma ciśnienia statycznego (zwykle ciśnienie) i dynamicznego w danej strudze płynu lub gazu jest stała.

Na przykład, gdy dmuchamy, to poruszające się powietrze wytwarza duże ciśnienie dynamiczne, w wyniku czego ciśnienie statyczne w okolicach poruszającego się powietrza jest małe. Siła nośna skrzydeł samolotów w rzeczywistości jest zależna od wielu różnych czynników, ale w każdym przypadku prawo Bernoulliego znajduje tu zastosowanie.

## 1.4 Sterowanie samolotem

Wiemy już, jak to się dzieje, że samoloty i inne statki powietrzne, cięższe od powietrza, potrafią latać. Jednak lot samolotu nie może się odbywać bez nadzoru, a pilot, który steruje maszyną musi mieć wpływ na wszystkie jego parametry, tzn. na kierunek lotu, wysokość,

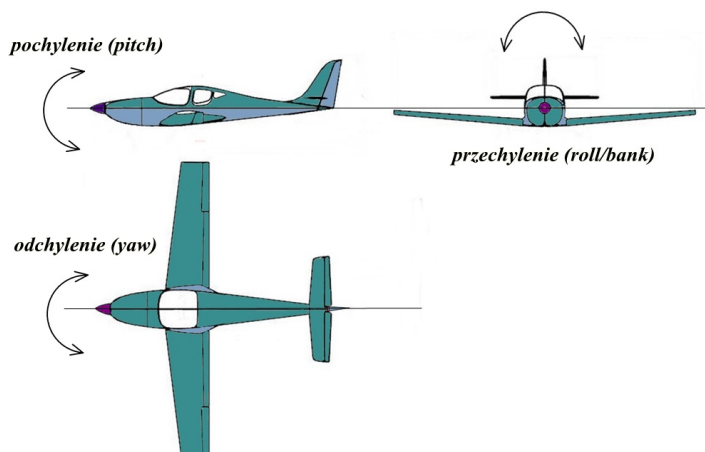
prędkość itp. Do sterowania lotem samolotu służą tzw. powierzchnie sterowe, umieszczone na zewnątrz maszyny (rys. 1.8). Odpowiednie ustawienie tych części, umożliwia obrót samolotu wokół dowolnej osi współrzędnych. Do głównych powierzchni sterowych zaliczamy: ster wysokości, ster kierunku - znajdujące się w części ogonowej samolotu - oraz lotki i klapy, które znajdują się na skrzydłach. Zmieniając położenie powierzchni sterowych (sterów), zmieniamy kierunek i prędkość opływu powietrza tych elementów, a tym samym zmieniamy ich siłę nośną. Powoduje to, że samolot zmienia swoje położenie w przestrzeni.



Rysunek 1.8: Główne powierzchnie sterowe samolotu

Zanim jednak dowiemy się, jak działają stery samolotu, musimy zapoznać się z kilkoma podstawowymi pojęciami, takimi jak:

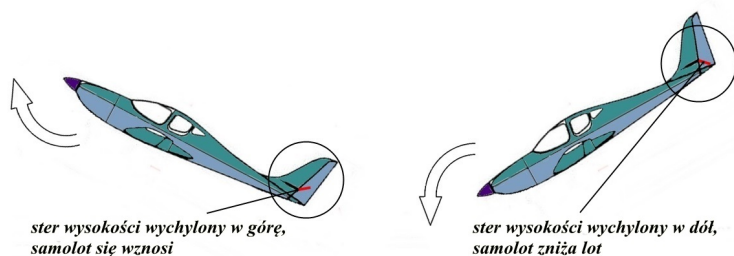
- pochylenie – jest to obrót wokół osi poprzecznej. Kiedy odchylamy ster wysokości do góry, wówczas część ogonowa samolotu ulega obniżeniu, co powoduje ustawienie samolotu w pozycję wznoszenia (rys. 1.9 i 1.10);
- odchylenie – obrót wokół osi pionowej. Pozycję samolotu w tej osi zmieniamy przy pomocy steru kierunku (rys. 1.9 i 1.11);
- przechylenie – jest to obrót wokół osi biegnącej wzdłuż samolotu, ruch ten realizowany jest głównie za pomocą lotek (rys. 1.9 i 1.12). Przechylenie następuje na skutek zwiększenia siły nośnej na jednym ze skrzydeł, a zmniejszenia jej na drugim.



Rysunek 1.9: Ruch kątowe samolotu

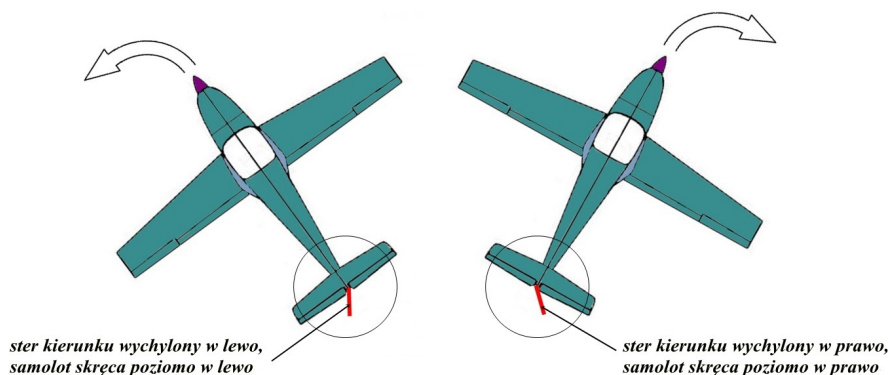
Teraz, kiedy już wiemy na czym polega różnica pomiędzy pochylem, przechyleniem, a odchyleniem, przyjrzyjmy się bliżej, jak działają stery samolotu i jaki wpływ ma zmiana ich położenia na lot samolotu.

1. *Ster wysokości* - służy do zmiany wysokości lotu. Zmiana jego położenia powoduje pochYLENIE samolotu w górę lub w dół.



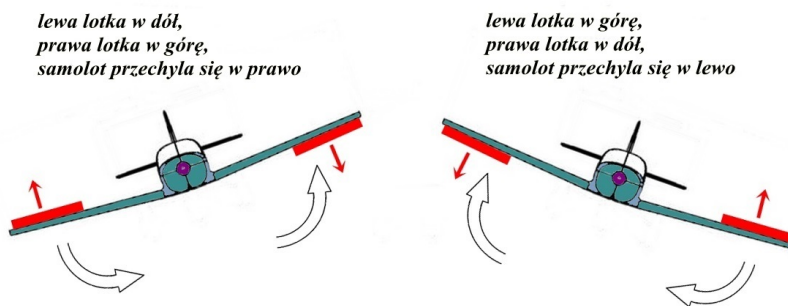
Rysunek 1.10: Działanie steru wysokości

2. *Ster kierunku* - służy do zmiany kierunku lotu. Wychylenie steru w lewo lub w prawo powoduje odchylenie samolotu od kierunku lotu.



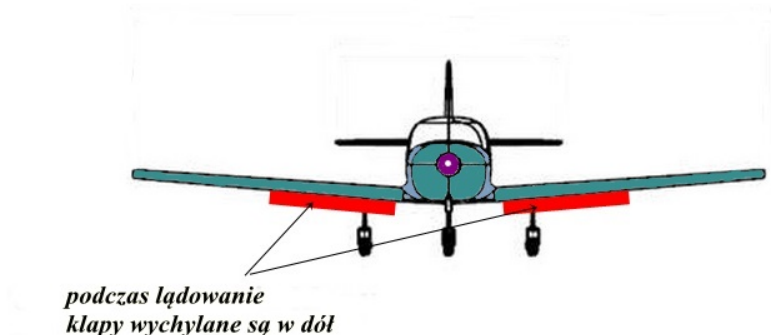
Rysunek 1.11: Działanie steru kierunku

3. *Lotki* - służą do przechylenia samolotu w lewo lub w prawo i umożliwiają wprowadzenie samolotu w zakręt. Lotki działają naprzemiennie. Podczas, gdy prawa lotka wychyla się w górę, to lewa wychyla się w dół i odwrotnie.



Rysunek 1.12: Sposób działania lotek

4. *Kłapy* - umieszczone są na skrzydłach między lotkami, a kadłubem samolotu (rys. 1.13). Wykorzystuje się je do wytworzenia dodatkowej siły nośnej w czasie, gdy samolot leci ze zmniejszoną prędkością, np. podczas lądowania. W przeciwieństwie do lotek, kłapy wychylają się w tę samą stronę, dokładnie o ten sam kąt i w tym samym czasie, by nie powodować obrotu samolotu.



Rysunek 1.13: Widok wychylonych klap

## 1.5 Co to jest awionika pokładowa i do czego służy?

Aby pilot miał podgląd na aktualne parametry lotu oraz na stan działania wszystkich urządzeń pokładowych, współczesne samoloty są wyposażone komputery pokładowe, a kokpit w różnego rodzaju wskaźniki, przełączniki i kontrolki (rys. 1.14).



Rysunek 1.14: Kokpit nowoczesnego samolotu

Zespół przyrządów i wskaźników elektronicznych w kokpicie samolotu nazywamy awioniką. Samo słowo AWIONIKA posiada kilka definicji. Może to być:

- ogół urządzeń elektronicznych w samolocie,



- nauka zajmująca się zastosowaniem elektroniki w lotnictwie i astronautyce,
- dział lotnictwa,
- elektronika lotnicza,
- lotnicze oprzyrządowanie elektroniczne,
- wyposażenie elektroniczne samolotu.

Podstawowe przyrządy (niezbędne w każdych warunkach), jakie możemy spotkać w kokpicie samolotu to przede wszystkim: sztuczny horyzont, prędkościomierz, wariometr, wysokościomierz i wskaźnik kursu. Przyjrzyjmy się bliżej co to za instrumenty.

**Sztuczny horyzont** jest to lotniczy przyrząd, służący do określenia orientacji przestrzennej statku powietrznego względem płaszczyzny horyzontu lokalnego. Pokazuje kąt pochylenia i przechylenia samolotu (rys. 1.15). Dzięki temu przyrządowi możemy poznać położenie przestrzenne maszyny.



Rysunek 1.15: Sztuczny horyzont

W sztucznym horyzoncie niebieskie tło symbolizuje niebo, natomiast brązowy obszar oznacza Ziemię. Wskazówka pozwala na odczyt kąta pochylenia, oznaczonego poziomymi kreskami na wskaźniku oraz kąta przechylenia, możliwego do odczytania dzięki kreskom umieszczonym na okręgu tarczy.

**Wysokościomierz** jest to przyrząd pokładowy, stosowany w praktycznie wszystkich rodzajach statków powietrznych, a także w sportach uprawianych w zróżnicowanym terenie. Jest to czuły manometr wskaźujący wysokość, dzięki pomiarowi ciśnienia powietrza i wyskalowany w metrach, stopach lub kilometrach (rys. 1.16).



Rysunek 1.16: Wysokościomierz

**Prędkościomierz** to urządzenie, pozwalające określić prędkość statku powietrznego poprzez pomiar różnicy ciśnienia statycznego i całkowitego (rys. 1.17). Często na prędkościomierzu zaznaczone są zakresy prędkości według odpowiedniego klucza kolorów:

- kolor biały to zakres prędkości, w którym używa się klap;
- kolor zielony to standardowe prędkości przelotowe (użytkowe);
- kolor żółty to prędkości dopuszczalne, powyżej prędkości przelotowych;
- kolor czerwony to maksymalna dopuszczalna prędkość.



Rysunek 1.17: Prędkościomierz

**Wariometr** to, obok wysokościomierza i prędkościomierza, jeden z podstawowych przyrządów pokładowych, wykorzystywanych na wszystkich typach statków powietrznych - od lotni i parolotni do samolotów pasażerskich (rys. 1.18). Służy do wskazywania prędkości

pionowej statku, czyli prędkości wznoszenia się lub opadania. Działa na zasadzie pomiaru zmieniającego się ciśnienia statycznego.



Rysunek 1.18: Wariometr

**Wskaźnik kursu** to przyrząd, pozwalający określić kierunek, w którym zmierza samolot. Najczęściej ma on postać okrągłej tarczy, na której widnieją oznaczenia kursu samolotu oraz wskaźnik, który często ma postać sylwetki samolotu (rys. 1.19).



Rysunek 1.19: Wskaźnik kursu lotu

Aby ograniczyć miejsce zajmowane na tablicy przyrządów i ułatwić pilotowi odczyt parametrów lotu, często wykorzystuje się zintegrowane systemy wskaźników, tzn. takie, gdzie kilka informacji można odczytać z jednego urządzenia. Często stosuje się je w postaci instrumentów pilotażowych przedstawionym na rysunku 1.20.



Rysunek 1.20: Zintegrowany system wskaźników

Na przedstawionym instrumencie centralne miejsce zajmuje sztuczny horyzont. Pozostałe elementy to np. po prawej stronie wysokościomierz, na którym możemy odczytać informację o aktualnej wysokości lotu, po lewej natomiast prędkościomierz, wraz z informacją dotyczącą zakresów dopuszczalnych prędkości.

## 1.6 Podsumowanie

Wiemy już teraz jak i dlaczego samoloty latają, a wsiadając do nich nie będziemy się dziwić, że mimo swojego dużego ciężaru potrafią wzbąć się w powietrze i przelecieć na inny kontynent, pokonując tysiące kilometrów. To dzięki zastosowaniu praw fizyki i osiągnięć współczesnej inżynierii możemy latać po całym świecie i cieszyć się możliwością wygodnego podróżowania.



## 2. Tarcie dobre i złe

*Marek Szewczyk*

### 2.1 Wstęp

Czy kiedykolwiek zastanawiałeś się, dlaczego pojazdy lub inne poruszające się obiekty, do których nie jest przyłożona żadna zewnętrzna siła, zwalniamy, aż wreszcie się zatrzymują. Albo dlaczego ślizgamy się na mokrej podłodze lub na skórce z banana (rys. 2.1). Na te, oraz na inne pytania znajdziesz odpowiedź w tym rozdziale.

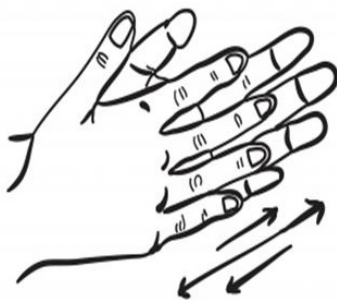


Rysunek 2.1: Mężczyzna przewraca się na śliskiej nawierzchni

Zjawiskiem, które jest odpowiedzialne za to że się ślizgamy jest tarcie, a w zasadzie jego brak.

**Definicja 2.1 — Tarcie.** Jest to opór ruchu, który występuje za każdym razem, gdy dwa przedmioty ocierają się o siebie. Tarcie działa wbrew ruchowi, czyli działa w przeciwnym do ruchu kierunku. Kiedy jeden z obiektów przesuwa się po drugim, wówczas w skutek tarcia zaczyna zwalniać, co jednocześnie oznacza, że traci on energię. Energia ta jednak nie znika, lecz zmienia się z energii ruchu w energię cieplną.

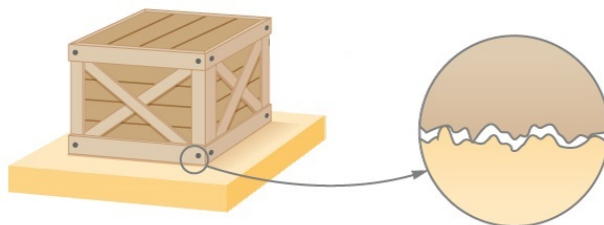
Dlatego, zgodnie z powyższą definicją, gdy jest zimno zacieramy dłonie. Bo gdy pocieramy je o siebie, wytwarza się pomiędzy nimi tarcie, a tym samym ciepło (rys. 2.2).



Rysunek 2.2: Zacieranie dłoni

## 2.2 Czynniki wpływające na tarcie

Tarcie jest spowodowane nierównością powierzchni, stykających się obiektów. Nawet wtedy, gdy wydaje się nam, że te powierzchnie są gładkie, w rzeczywistości posiadają one bardzo liczne drobne niedoskonałości. Spójrz tylko na rysunek 2.3.



Rysunek 2.3: Nierówności stykających się powierzchni

Widoczne na powyższym rysunku nierówności, powodują zazębienie się tych powierzchni. Skutkuje to wzrostem siły tarcia pomiędzy szorstkimi powierzchniami.

Innym czynnikiem wpływającym na tarcie jest siła, z jaką powierzchnie na siebie naciskają. Bezpośredni wpływ na to ma masa obiektów. Zjawisko to potwierdza rysunek 2.4, na którym dwaj chłopcy próbują przesunąć skrzynie o różnych masach. Tak więc, chłopiec pchający mniejszą skrzynię, przesuwa ją bez większych przeszkód. Natomiast drugi chłopiec, pchający skrzynię większą, musi przyłożyć dużo więcej siły, by ją przemieścić.



Rysunek 2.4: Próba przepchnięcia skrzyń o różnej masie

Omawiając czynniki wpływające na tarcie, warto zwrócić uwagę na zjawiska, takie jak **tarcie statyczne** i **kinetyczne**. Żeby to wyjaśnić przypomnij sobie sytuację, w której próbowałeś przesunąć ciężki przedmiot, na przykład szafę. Czy zwróciłeś uwagę, że najwięcej siły trzeba użyć, by tę szafę ruszyć z miejsca, natomiast później utrzymanie jej w ruchu nie wymaga już tak dużej siły. Aby to zobrazować spójrz na rysunek 2.5.



Rysunek 2.5: Przejście tarcia statycznego w tarcie kinetyczne

Mężczyzna przedstawiony na rysunku, próbuje przesunąć szafę. Ze względu na to, że szafa jest bardzo ciężka, jej przesunięcie nie jest łatwe. W związku z tym, mężczyzna pcha szafę coraz mocniej, co przedstawia wykres ilustrujący wzrost siły. Siła rośnie do momentu osiągnięcia

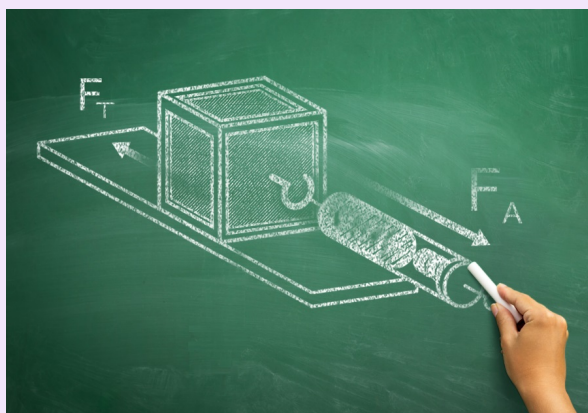
granicznej wartości siły tarcia statycznego i zainicjowania ruchu. W tym momencie szafa zaczyna się przesuwać, a siła tarcia maleje, osiągając stałą wartość. W związku z tym tarcie można podzielić na:

- I. **Tarcie statyczne (spoczynkowe)** - występujące pomiędzy ciałami, które pozostają nieruchome.
- II. **Tarcie kinematyczne (ruchome)** - występujące pomiędzy ciałami, które przemieszczają się względem siebie.

**Twierdzenie 2.1** Wartość siły tarcia kinetycznego jest mniejsza od maksymalnej wartości siły tarcia statycznego.

Powyższe twierdzenie można, w bardzo łatwy sposób, sprawdzić samodzielnie w domu, wykonując poniższe ćwiczenie.

**Ćwiczenie 2.1** Do wykonania ćwiczenia będzie potrzebny siłomierz, oraz element, który można łatwo zaczepić i przeciągać po płaskiej powierzchni, w sposób przedstawiony na rysunku 2.6



Rysunek 2.6: Schemat wykonania ćwiczenia

Gdy już będziesz miał niezbędne elementy, zaczeep jedną z końcówek siłomierza o przygotowany element i spróbuj go powoli przesunąć, ciągnąc za drugą końcówkę siłomierza. Zgodnie z zasadą zachowania równowagi, wartość siły zmierzonej przy użyciu siłomierza będzie odpowiadała wartości siły tarcia. I zgodnie z twierdzeniem 2.1, wartość siły tarcia statycznego będzie rosła wraz ze wzrostem siły, próbującej wprowadzić ten element w ruch. Będzie się tak działo do momentu, kiedy element zacznie się przesuwać, wówczas tar-



cie statyczne zmieni się w tarcie kinetyczne, jego wartość spadnie w stosunku do maksymalnej siły tarcia statycznego i będzie stała do momentu zatrzymania się elementu. ■

## 2.3 Tarcie, czyli zło konieczne

Tarcie jest zjawiskiem fizycznym, mogącym występować jako tarcie pozytywne lub negatywne. To czy akurat tarcie jest dobre czy też nie, zależy przede wszystkim od sytuacji, w której się znajdujemy. O dobrym tarciu mówi się wówczas, kiedy jego działanie przynosi pozytywny i zamierzony skutek. Przykładem takiego pozytywnego rodzaju tarcia, jest chociażby możliwość przemieszczania się zarówno pieszo, jak również przy użyciu różnych środków lokomocji, takich jak samochód czy rower. To właśnie dzięki tarciu pomiędzy podszwą buta a chodnikiem, mamy możliwość chodzenia. To samo tarcie, występujące pomiędzy oponą i drogą, pozwala na poruszanie się samochodem.



Rysunek 2.7: Siła tarcia podczas chodzenia

Gdy siła tarcia, która pozwala nam się przemieszczać maleje, na przykład w skutek oblodzonej drogi, zaczynamy się ślizgać. Wówczas, nieważne czy akurat idziemy pieszo, czy jedziemy samochodem, spadek przyczepności, wywołany niedostatecznym tarcie między podszwą buta lub oponą samochodu, jest bardzo niebezpieczny i może prowadzić do niebezpiecznych sytuacji. Takich jak tych, przedstawionych na rysunku 2.8.



Rysunek 2.8: Skutek braku tarcia

Nie zawsze jednak tarcie sprzyja i umożliwia przemieszczanie się. Są takie sytuacje, kiedy sami staramy się zmniejszyć tarcie, przy użyciu różnych metod. Najprostszym przykładem, kiedy możemy mówić o negatywnych skutkach występowania tarcia podczas próby przemieszczania się, jest tarcie w czasie jazdy na nartach. Może część z was jeździ na nartach lub interesuje się narciarstwem i wie, że tarcie, pojawiające się pomiędzy nartami i śniegiem, jest niepożądane, powoduje utrudnienie w ślizganiu się i zjeżdżaniu ze stoku, a tym samym zabiera całą frajdę.



Rysunek 2.9: Małe tarcie sprzyja sportom zimowym

Również przedstawiony na rysunku 2.10 szkic, jest możliwy do wykonania dzięki tarcia. W tym przypadku, tarcie występuje między rysikiem ołówka, a kartką papieru. Wynikiem tego tarcia jest pozostawiony na kartce ślad startego ołówka.



Rysunek 2.10: Wykonywanie szkicu

## 2.4 Co wpływa na tarcie?

**Twierdzenie 2.2** Siła tarcia zależy od rodzaju, trących o siebie, powierzchni i jest wprost proporcjonalna do nacisku, wywieranego na powierzchnię.

Zgodnie z twierdzeniem 2.2, różne rodzaje powierzchni trą o siebie z różną siłą. Jest to związane z rodzajem zastosowanych materiałów, ale przede wszystkim z chropowatością powierzchni. Duże nierówności powierzchni, przesuwających się względem siebie, powodują ich ząbienie i zwiększają tarcie. Żeby to sprawdzić wykonaj poniższe ćwiczenie.

**Ćwiczenie 2.2** Do wykonania ćwiczenia będzie potrzebny samochodek, kilka książek, 3 kawałki tektury, papier ścierny, filc, klej oraz

stoper. Zaczynij od przygotowania powierzchni, po której będzie zjeżdżał samochodzik. W tym celu, na powierzchni jednej z tektur naklej papier ścierny, natomiast na drugim kawałku tektury naklej filc. Następnie zbuduj rampę z kawałka tektury, opartej na książkach, tak jak ma to miejsce na rysunku 2.11.



Rysunek 2.11: Rampa do badań tarcia różnych powierzchni

Ćwiczenie będzie polegało na pomiarze czasu, jaki potrzebuje samochodzik, by zjechać na sam dół rampy. Ze względu na rodzaj powierzchni, po której będzie zjeżdżał samochodzik, czas będzie się zmieniał, wskazując tym samym na zmienną siłę tarcia. Pamiętaj! Im więcej czasu będzie potrzebował samochodzik na pokonanie rampy, tym większa jest siła tarcia. ■

Drugim, a zarazem najważniejszym, czynnikiem wpływającym na tarcie, jest nacisk wywierany na powierzchnię. Żeby lepiej to zobrazować poniżej został przedstawiony problem, którego rozwiązanie potwierdza zależność siły tarcia od nacisku na powierzchnię.

**Problem 2.1** Na pewno nieraz zdarzyło ci się przesuwając po podłodze jakieś bardzo ciężkie rzeczy, na przykład meble lub pudło. Jeśli nie, to wyobraź sobie sytuację, że pudełko, znajdujące się na podłodze, wypełniłeś do pełna książkami, a następnie próbujesz je przesunąć, gdyż jest za ciężkie, by je przenieść (rys. 2.12).



Rysunek 2.12: Pudełko wypełnione książkami

Okazuje się jednak, że próba przesunięcia również się nie powiodła i pudełko nie przesunęło się nawet o milimetr. Co robisz w takim momencie? Masz dwie możliwości:

- prosisz kogoś o pomoc w przesunięciu pudełka, zwiększając tym samym siłę wymuszającą ruch;
- wyjmujesz część książek, zmniejszając tym samym wagę pudełka i jego nacisk na podłoże.

## 2.5 Zwiększanie i redukowanie tarcia

Jak już wiecie, tarcie, w niektórych przypadkach, jest pożądane, dlatego podeszwy butów czy też opony są pokryte licznymi żłobieniami, tak jak zostało to przedstawione na rysunku 2.13.



Rysunek 2.13: Żłobienia zwiększające tarcie

Zastosowanie żłobień na butach i oponach zwiększa ich tarcie o powierzchnię, poprawiając tym samym ich przyczepność. Tarcie zwiększa się również celowo w przypadku klocków hamulcowych, tak aby po wciśnięciu hamulca, pojazd skutecznie się zatrzymał (rys. 2.14).



Rysunek 2.14: Samochód zatrzymuje się dzięki tarcia

W momencie, kiedy tarcie jest zjawiskiem niepożądanym, powodującym uszkodzenia lub utrudniającym ruch, stosuje się wiele technik, mających na celu jego zmniejszenie. Najpopularniejszym sposobem zmniejszenia tarcia, jest zastosowanie środka smarnego, takiego jak olej bądź smar. Zadaniem tych substancji jest stworzenie cienkiej warstwy, oddzielającej powierzchnie poruszające się, zapobiegając tym samym ocieraniu się ich powierzchni. Inną metodą zmniejszającą tarcie jest zmniejszenie nierówności powierzchni trących, stosując szlifowanie lub polerowanie. Kolejną metodą, która świetnie zmniejsza opory ruchu powstające na skutek tarcia to zastosowanie przyrządów zmieniających tarcie kinetyczne na **tarcie toczne**.

**Twierdzenie 2.3** Tarcie toczne jest dużo mniejsze aniżeli tarcie kinetyczne.

Żeby mieć do czynienia z tarciem tocznym, niezbędne jest zastosowanie elementów w kształcie koła, umożliwiających swobodne toczenie się po powierzchni. Przykładem mogą być wrotki (rys. 2.15), czyli buty, do których zostały przymocowane kółka. Dodatkowo, w celu zniwelowania oporów toczenia stosuje się urządzenia, takie jak łożyska toczne.



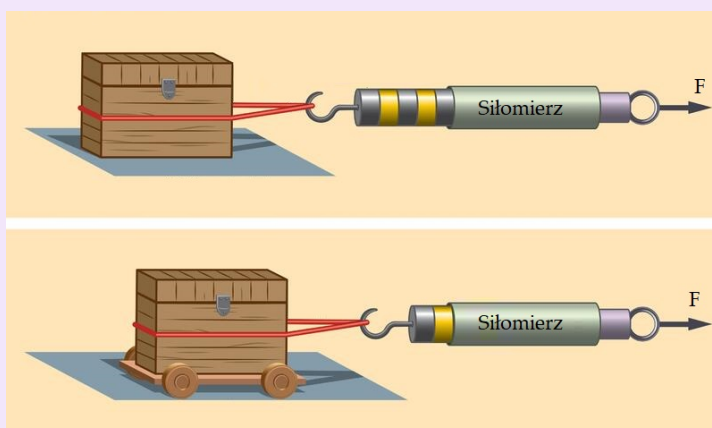
Rysunek 2.15: Wrotki

Żeby sprawdzić Twierdzenie 2.3, wykonaj poniższe ćwiczenie

**Ćwiczenie 2.3** Do wykonania ćwiczenia będzie potrzebne pudełko, siłomierz, mały wózek na kółkach lub dwa okrągłe ołówki. Ćwiczenie podzielone jest na dwa etapy:

- w pierwszym z nich, zaczepl siłomierz o pudełko i spróbuj je przeciągnąć po płaskiej powierzchni,
- w drugim, ustaw pudełko na wózeczku lub na ołówkach i ponownie spróbuj przeciągnąć pudełko.

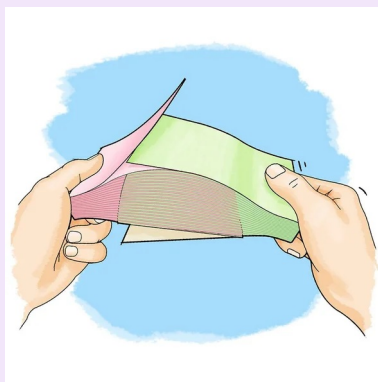
Zgodnie z twierdzeniem 2.3, siła potrzebna do przemieszczenia pudełka, znajdującego się na wózeczku, powinna być znacznie mniejsza, zgodnie z tym, co zostało przedstawione na rysunku 2.16



Rysunek 2.16: Schemat wykonania pomiaru siły tarcia

Na koniec, wykonaj poniższe ćwiczenie, które sprawdzi jak bardzo jesteś silny.

**Ćwiczenie 2.4** Zadanie jest bardzo proste. Do jego wykonania przygotuj sobie dwie książki lub dwa zestawy kolorowych karteczek podobnej wielkości. Następnie potasuj je, w sposób pokazany na rysunku 2.17 i spróbuj je rozdzielić ciągnąc za grzbiety książek lub karteczek.



Rysunek 2.17: Sposób tasowania karteczek





## 3. Siła gazów

*Jan Czyżewski*

### 3.1 Wstęp

Żyjemy na planecie posiadającej atmosferę. Jesteśmy więc przyzwyczajeni do stałego kontaktu z substancjami gazowymi. Cały czas otacza nas powietrze, które wywiera na nas nacisk, którego oczywiście na co dzień nie zauważamy.

Już we wczesnych okresach rozwoju ludzkości odkryto, że zjawiska związane z ruchem gazów, mogą mieć bardzo duży wpływ na nas i nasze otoczenie. Jednym z najbardziej zauważalnych i odczuwalnych zjawisk tego typu jest wiatr, czyli ruch dużych mas powietrza. Poruszające się powietrze, kiedy trafia na jakiś obiekt, powoduje pewien wzrost ciśnienia od strony naporu powietrza. Po drugiej stronie ciśnienie jest nieco niższe. Różnica ciśnień powoduje powstanie siły, która usiłuje poruszyć obiektem. Różnica ciśnień zależy od prędkości ruchu gazu i kształtu obiektu. Jak wiemy, zbyt silny wiatr potrafi być wręcz katastrofalny w skutkach, jednak zjawisko daje się spożytkować dla potrzeb człowieka. Wystarczy wspomnieć o statkach żaglowych, czy wiatrakach wykorzystujących ruch powietrza.

Pierwsze, bardziej zaawansowane wykorzystanie siły gazów, pojawiło się już na początku naszej ery (choć wspomina się o jeszcze wcześniejszych) w postaci tzw. bani Herona. Tutaj sytuacja wyglądała nieco inaczej, wykorzystany został efekt, jaki powoduje uwolnienie

energii zgromadzonej w gazie, o ciśnieniu znacznie wyższym niż atmosferyczne. Wspomniana bania, była zbiornikiem z wodą, posiadającym dwie rurki, działające jak dysze. Całość była zamocowana tak, by mogła się obracać. Zbiornik napełniano wodą i umieszczano nad ogniem. Woda, po zagotowaniu się, zaczynała gwałtownie parować i uchodzić pod ciśnieniem przez rurki. Wypływ pary powodował powstawanie sił, działających na zbiornik. Końce rurek były ustawione tak, że powstałe siły wprawiały cały zbiornik w ruch obrotowy. Wykorzystanie tego zjawiska znamy dziś chociażby z silników odrzutowych, czy rakietowych. Tutaj skoncentrujemy się jednak na nieco innym wykorzystaniu ciśnienia gazów, czyli silnikach tłokowych.

## 3.2 Silniki parowe

Jak widać, sprężony gaz możemy wykorzystać jako nośnik energii. Od XVII wieku zaczęto rozwijać silniki parowe. Jako pierwsze pojawiły się silniki tłokowe. Silniki takie wymagały źródła pary, w postaci kotła. Kocioł był zbiornikiem, w którym podgrzewano wodę, aż do temperatury wrzenia. Był zamknięty i posiadał odpowiednio grube ściany, zdolne do wytrzymania powstającego ciśnienia. Najstarsze kotły miały zewnętrzne paleniska, potem palenisko wbudowywano do środka. Kotły podgrzewano najczęściej za pomocą spalania węgla lub drewna. Na skutek wrzenia wody, w kotle wytwarzała się para. Ze względu na to, że kocioł był zamknięty i para nie mogła znaleźć ujścia na zewnątrz, w środku wzrastało ciśnienie. Przed nadmiernym ciśnieniem, mogącym doprowadzić do eksplozji kotła, chroniły zawory bezpieczeństwa, upuszczające, w razie potrzeby, nadmiar pary. Energia uwolniona w procesie spalania, była więc magazynowana w parze wodnej pod ciśnieniem. Teraz należało przekształcić tą energię, w użyteczną pracę. Do tego właśnie służył silnik parowy.

Parowe silniki tłokowe składały się z tłoka, wykonującego ruch posuwisto-zwrotny i układu korbowego, przekształcającego ten ruch, w ruch obrotowy. Uzyskany ruch obrotowy można było wykorzystać bezpośrednio do napędu różnych maszyn lub pojazdów. Ruch tłoka wywoływała różnica ciśnień. Tłok był zamknięty w cylindrze, zamkniętym na końcach pokrywami. Tworzyły się więc dwie przestrzenie robocze pomiędzy tłokiem, a przednią pokrywą cylindra i pomiędzy tłokiem, a tylną pokrywą cylindra. Tłok przemieszczał się po całej długości cylindra. Na krańcach cylindra znajdowały się otwory, połączone z układem rozrządu. Układ rozrządu kierował, w odpowiednim momencie, parę z kotła do jednej przestrzeni roboczej, drugą łącząc



Rysunek 3.1: Lokomotywa parowa

w tym samym czasie z atmosferą. Różnica ciśnień pomiędzy parą, a powietrzem atmosferycznym powodowała, że na tłok zaczynała działać siła i był on odpychany. Kiedy tłok pokonał prawie całą drogę przez cylinder, układ rozrządu przełączał kanały. Przestrzeń robocza, wypełniana do tej pory parą, była łączona z atmosferą, para była tym samym wypuszczana na zewnątrz. W tym czasie, przestrzeń po drugiej stronie tłoka, zmniejszona teraz do minimalnej objętości, była łączona z kotłem i tłok zaczynał być odpychany w drugą stronę. Proces ten powtarzał się cyklicznie.

Powstanie silników parowych było jednym z czynników, które umożliwiły rewolucję przemysłową. Umożliwiły również dynamiczny rozwój lądowych i wodnych środków transportu. Jedynym środkiem transportu, gdzie silniki parowe nie znalazły zastosowania, było lotnictwo. Jednym z ciekawszych zastosowań silników parowych była kolej, gdzie powstało wiele odmian lokomotyw, często o bardzo specyficznej konstrukcji, dostosowanej do spełnianej funkcji. Najszybsze pociągi parowe, potrafiły przekroczyć z pasażerami barierę 200 km/h już w latach 30. XX wieku. Jedną z wad silników parowych, o stosowanej powszechnie konstrukcji, była niska sprawność, często rzędu zaledwie kilku procent. Oznacza to, że tylko kilka procent energii, uwolnionej w procesie spalania, było przekształcane w pracę, a reszta była bezpowrotnie tracona. Między innymi dlatego, era tłokowych silników parowych dobiegła końca. Jednym z urządzeń spokrewnionych z tymi silnikami są katapulty parowe, wykorzystywane na lotniskowcach do wspoma-



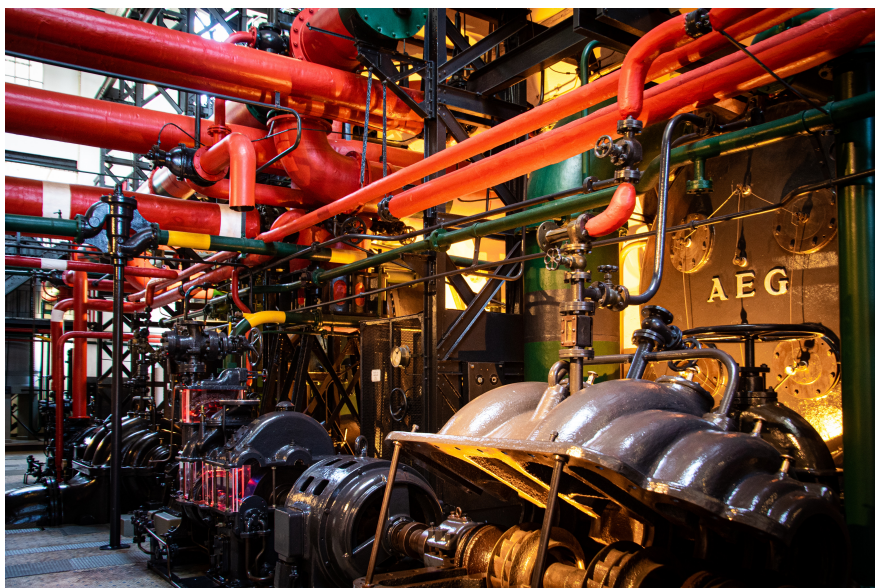
Rysunek 3.2: Cylinder silnika parowego wraz z układem rozrządu

gania startu samolotów. Wykorzystują one tłok, napędzany parą pod wysokim ciśnieniem. Ciekawostką są duże silniki na sprężone powietrze, zasilane z butli, wykorzystywane kiedyś do napędu pojazdów, np. w tunelach, aby nie powodować zadymienia.

### 3.3 Turbiny parowe

Warto też wspomnieć o innej, licznej grupie silników parowych, czyli silnikach przepływowych. Należą do nich turbiny parowe. Maszyny te posiadają koła, wyposażone w łopatki o specjalnym kształcie. Na łopatki te jest kierowany strumień pary, wprawiający koło od razu w ruch obrotowy. Turbiny parowe napędzały statki i okręty, urządzenia

przemysłowe, eksperymentowano z nimi na kolei. Podstawowym ich zastosowaniem dzisiaj są elektrownie zarówno te spalające różne rodzaje paliw, jak również atomowe.

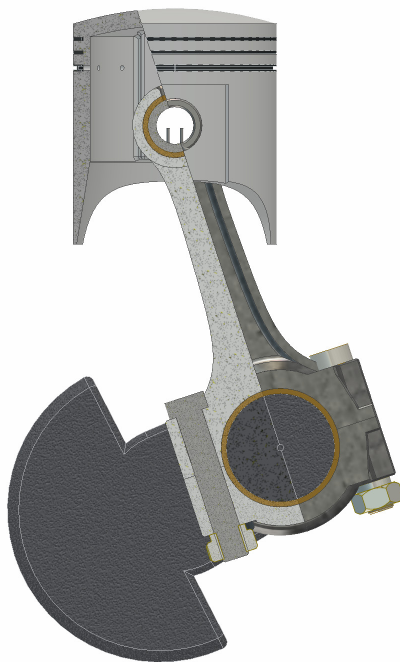


Rysunek 3.3: Turbiny parowe są powszechnie używane do napędu generatorów w elektrowniach

### 3.4 Tłokowe silniki spalinowe

W pewnym momencie pojawiła się koncepcja, aby wzrost ciśnienia wywoływać dopiero w cylindrze silnika, zamiast dostarczać do niego wcześniej sprężony czynnik roboczy. Tak powstały silniki o spalaniu wewnętrznym. Idea polega na zamknięciu w cylindrze mieszanki powietrza atmosferycznego, zawierającego tlen oraz paliwa. W odpowiednim momencie, inicjowany jest zapłon i rozpoczyna się proces spalania. Wtedy uwalniana jest energia, zgromadzona w cząsteczkach paliwa. Gwałtownie wzrasta ciśnienie i temperatura. Proces ten odbywa się w zamkniętej komorze spalania, tworzonej, podobnie jak w tłokowym silniku parowym, przez cylinder i poruszający się w nim tłok. Koniec cylindra jest zamknięty głowicą.

Pierwsze silniki spalały mieszanek, która nie była wstępnie sprężana, miała więc ciśnienie atmosferyczne. Szybko odkryto jednak, że dużo lepsze efekty można osiągnąć, sprężając mieszanek palną przed zapłonem.

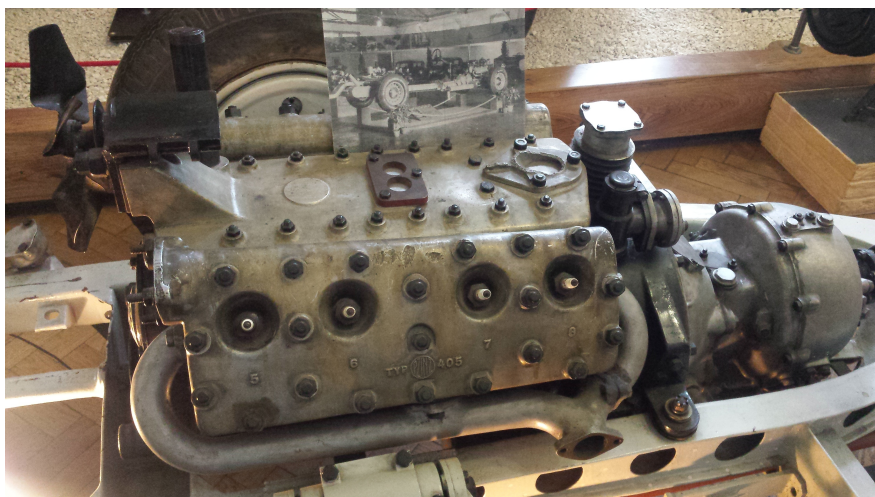


Rysunek 3.4: Schemat układu korbowego silnika spalinowego - widoczne są tłok, wał korbowy oraz łączący je korbowód

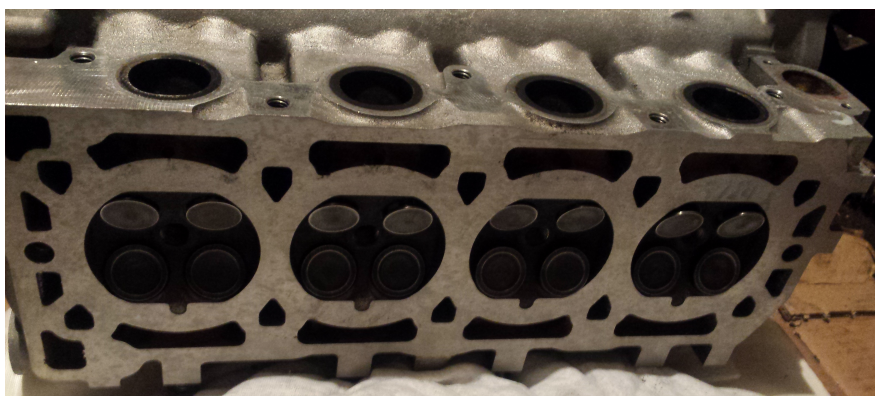
Cykl pracy silnika spalinowego jest więc nieco bardziej skomplikowany i musi składać się z kilku etapów. Pierwszym z nich jest napełnienie cylindra świeżą mieszanką. Tłok oddala się wtedy od głowicy, objętość przestrzeni roboczej wzrasta. Mieszankę tę trzeba następnie sprężyć, tłok zawraca, objętość zmniejsza się. Przestrzeń robocza jest wtedy odcięta od otoczenia, więc ciśnienie w środku wzrasta. Po wstępnym sprężeniu mieszanki należy wywołać zapłon. Dochodzi wtedy do procesu spalania i gwałtownego wzrostu ciśnienia w przestrzeni roboczej. Ciśnienie to odpycha tłok do dołu. Jest to etap, kiedy silnik oddaje energię. Na koniec trzeba się jeszcze pozbyć spalin, aby zrobić miejsce dla świeżej mieszanki. Dzieje się to podczas powrotu tłoka w stronę głowicy.

W najpopularniejszych obecnie silnikach czterosuwowych, każdy z tych etapów odpowiada jednemu suwowi tłoka (czyli ruchowi od jednego skrajnego położenia, do drugiego), cały cykl zajmuje więc dwa obroty wału korbowego. Istnieją też silniki dwusuwowe, w których proces pozbywania się spalin i zastępowania ich świeżą mieszanką

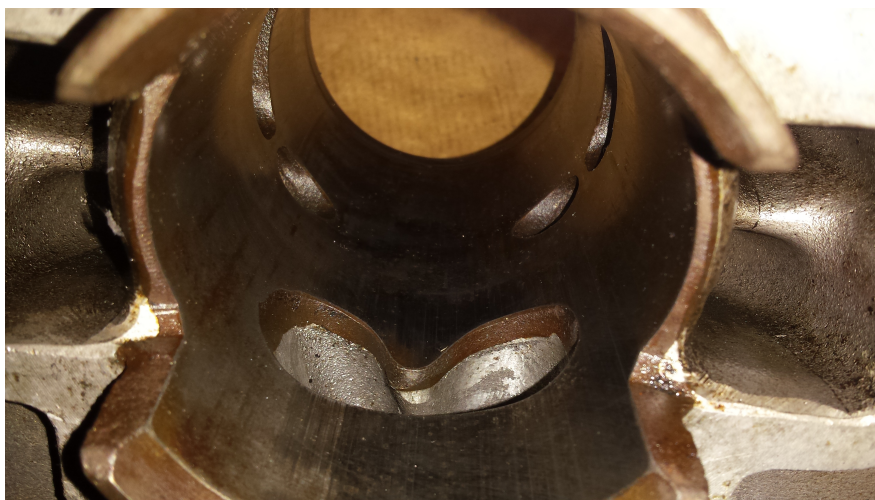
następuje jednocześnie, przez co cały cykl ich pracy zamyka się w dwóch suwach tłoka, czyli jednym obrocie wału korbowego. Teoretycznie takie silniki powinny być dwa razy mocniejsze, jednak w praktyce bardzo ciężko jest uzyskać taki efekt. Za sterowanie napływem do przestrzeni roboczej silnika świeżej mieszanki, wypuszczeniem spalin oraz zamykaniem tej przestrzeni w odpowiednim momencie, odpowiada układ rozrządu. Zazwyczaj jest on wykonany w formie ruchomych zaworów, a czasami okien w cylindrze, odsłanianych przez tłok, podczas jego ruchu.



Rysunek 3.5: Polski, przedwojenny silnik V8



Rysunek 3.6: Głowica z widocznymi zaworami silnika czterosuwowego



Rysunek 3.7: Cylinder silnika dwusuwowego z widocznymi kanałami rozrządczymi

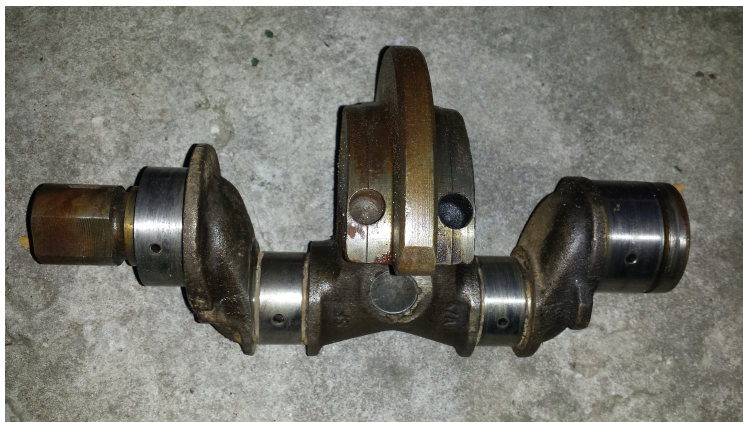
Jednym z warunków pracy silnika jest dostarczenie do niego tlenu. Tlen znajduje się w otaczającym nas powietrzu, więc z jego dostępnością nie ma problemu. Im większą moc silnika chcemy uzyskać, tym więcej powietrza należy zassać do silnika. Za ten proces, obok rozrządu, odpowiada układ dolotowy silnika. Ma on zadanie dostarczyć do komory spalania oczyszczone powietrze w wymaganej ilości. Trzeba tu dodać, że istnieją silniki zwane wolnossącymi, które pobierają do komór spalania powietrze o ciśnieniu atmosferycznym, a także tzw. doładowane, zasilane powietrzem tłoczonym, np. przez turbosprężarkę. Sprężone powietrze ma większą gęstość, zawiera więc w tej samej objętości więcej tlenu. Dlatego silniki z doładowaniem mogą osiągać większe moce. Kiedy dysponujemy już tlenem, potrzebne jest paliwo. Jako paliwa używa się najczęściej związków węgla i wodoru. Lżejsze z nich mają formę gazu (np. gaz LPG), cięższe są cieczami (np. benzyna, olej napędowy). Podczas procesu spalania, z reakcji tlenu z paliwem węglowodorowym, powstają głównie woda i dwutlenek węgla.

Niestety, proces spalania nie zachodzi zazwyczaj w sposób doskonały, dlatego powstają też substancje, takie jak trujący tlenek węgla czy tlenki azotu. Te ostatnie powstają na skutek łączenia się, pod wpływem warunków panujących w komorze spalania, azotu, zawartego w powietrzu, z tlenem. Powstaje też sadza i szereg innych, niezbyt mile widzianych produktów spalania. Dlatego, w celu ich eliminacji, stosuje się, m.in. katalizatory i filtry cząstek stałych. Za usuwanie



(i oczyszczanie) spalin z silnika odpowiada układ wydechowy. Posiada on ponadto tłumiki. Bez tłumików, na skutek wylotu z komór spalania spalin, które wciąż posiadają znaczne ciśnienie, silniki byłyby bardzo głośne.

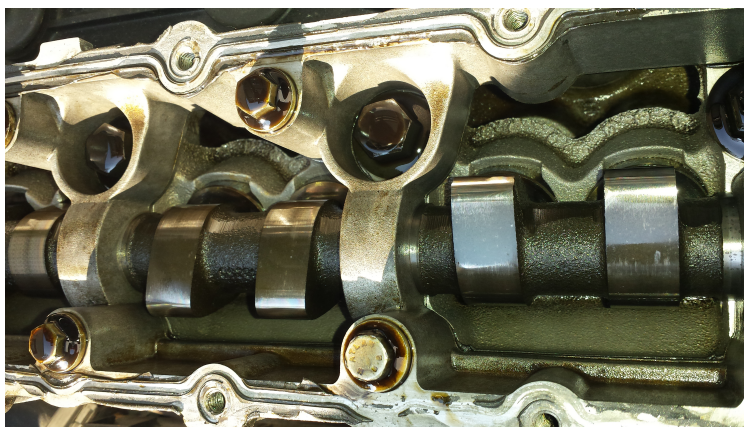
Silniki spalinowe występują w dwóch zasadniczych odmianach. Pierwszą są powstałe nieco wcześniej silniki z zapłonem wymuszonym (inaczej silniki z zapłonem iskrowym, niskoprężne lub silniki Otta). W silnikach tych sprężana jest, przygotowana wcześniej, mieszanka paliwowo-powietrzna. Mieszanka ta, po sprężeniu, jest zapalana w ściśle ustalonym momencie. Najczęściej jest to realizowane za pomocą iskry elektrycznej, która przeskakuje pomiędzy elektrodami świecy zapłonowej. Moc silnika reguluje się ilością mieszanki wpuszczanej do komory spalania. Drugą grupę stanowią silniki z zapłonem samoczynnym (inaczej silniki wysokoprężne lub Diesla). Tutaj sprężane jest samo powietrze i to do bardzo wysokiego ciśnienia. Kiedy tłok zbliża się do końca swej drogi ku głowicy, w odpowiednim momencie do komory spalania wtryskiwane jest paliwo. Sprężane powietrze, oprócz wysokiego ciśnienia, uzyskuje też wysoką temperaturę. W takich warunkach, odpowiednie paliwo (np. olej napędowy) zapala się samoczynnie. Moc silnika regulowana jest ilością wtryskiwanego paliwa, ilość zasysanego powietrza jest stała. Taki sposób zapłonu powoduje, że silniki Diesla (szczególnie starsze) są trudniejsze do odpalenia w zimie. Po prostu chłodne elementy silnika pochłaniają całe ciepło wytworzone podczas sprężania powietrza i samozapłon paliwa nie udaje się. Dlatego stosuje się różne urządzenia, wytwarzające dodatkowe ciepło, np. świece żarowe.



Rysunek 3.9: Wał korbowy silnika spalinowego



Rysunek 3.8: Świeca zapłonowa, w momencie przeskoku iskry pomiędzy elektrodami



Rysunek 3.10: Wałek rozrządu silnika czterosuwowego, widoczne krzywki służą do otwierania zaworów

### 3.5 Silniki odrzutowe, turbowałowe, strumieniowe

Również w przypadku silników spalinowych, szeroko rozpowszechnione są silniki przepływowe. Należą do nich silniki odrzutowe, turbowałowe, czy strumieniowe.

W komorze spalania silnika odrzutowego jest, w sposób ciągły, spalane paliwo. Proces spalania powoduje wzrost ciśnienia i temperatury

powstałych spalin. Spaliny te są kierowane na łopatki turbiny, którą napędzają. Turbina napędza zaś sprężarkę położoną z przodu silnika. Sprężarka tłoczy powietrze do komory (a raczej komór, gdyż często jest ich więcej) spalania. Rozpędzony strumień spalin opuszczający silnik, jest źródłem ciągu, czyli siły wprawiającej w ruch silnik (oraz połączone z nim elementy, np. samolot).

Silnik turbowałowy działa podobnie, jednak tam większość energii spalin jest odbierana przez wał turbiny i służy do napędzania różnych urządzeń, np. wirników w helikopterach.

Bardzo ciekawą konstrukcją są silniki strumieniowe, nie posiadające zazwyczaj elementów ruchomych. W zasadzie ich głównym elementem jest odpowiednio ukształtowana rura. Silniki takie mogą pracować dopiero przy bardzo wysokich prędkościach (minimum rejony prędkości dźwięku). Działają w ten sposób, że rozpędzone powietrze, wpadające do wlotu silnika, jest sprężane na skutek odbicia od specjalnie ukształtowanych ścian rury. Następnie jest do niego wtryskiwane paliwo, które spala się, podnosząc ciśnienie i temperaturę. Następnie rozpędzone spaliny opuszczają silnik, po drugiej stronie, generując ciąg.



Rysunek 3.11: Samolot zwiadowczy SR-71 Blackbird, wyposażony w silniki odrzutowo-strumieniowe

### 3.6 Silniki rakietowe

Kolejną grupę silników, stanowią silniki rakietowe. Podobnie do silników odrzutowych, służą one do wytwarzania ciągu, mogącego wprawiać ruch, np. samolot czy statek kosmiczny. Główną różnicą jest to, że silniki odrzutowe wykorzystują do działania tlen zawarty w powietrzu. Silnik rakiety zaś, jest zasilany przez substancje chemiczne (paliwo i utleniacz) zmagazynowane w zbiornikach i nie potrzebuje do pracy powietrza. Paliwo i utleniacz są wtryskiwane do komory spalania, gdzie ulegają spalaniu. Strumień powstałych gazów uchodzi przez dyszę silnika, generując ciąg.



Rysunek 3.12: Silniki rakietowe użyte do napędu wahadłowca

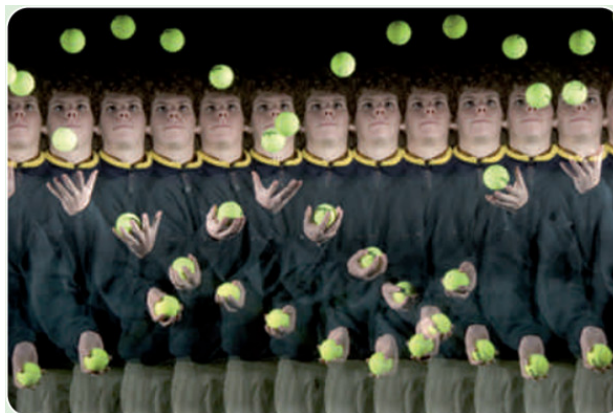


## 4. Ciało w ruchu

*Joanna Zielińska-Szwajka*

### 4.1 Wstęp

Nasze oczy bardzo sprawnie wykrywają ruch. Zauważamy, nawet niewielkie, ruchy występujące poza kącikami naszych oczu. Ważne jest, abyśmy potrafili ocenić ruch – pomyśl o przejściu drogi, jeździe na rowerze czy rzucaniu i łapaniu piłki. Rysunek 4.1 pokazuje sposób, w jaki ruch można zarejestrować na zdjęciu.



Rysunek 4.1: Chłopiec żonglujący trzema piłkami

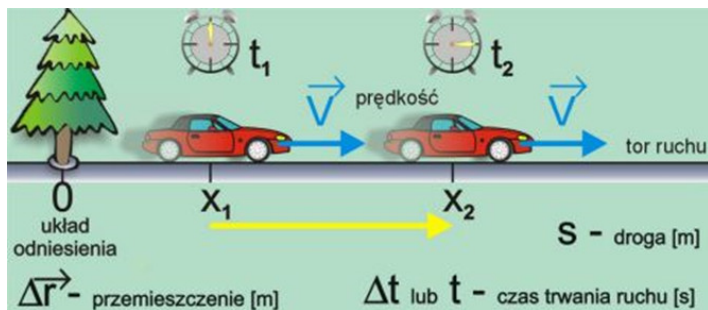
Jest to stroboskopowe zdjęcie chłopca, żonglującego trzema piłkami. Gdy żongluje, kilka razy na sekundę błyska jasna lampa, a kamera zapisuje pozycje kulek w równych odstępach czasu. Gdybyśmy znali czas między rozbłyskami, moglibyśmy zmierzyć zdjęcie i obliczyć prędkość piłki, gdy porusza się w powietrzu.

**Definicja 4.1 — Ruch.** Zachodząca w czasie  $(t_1, t_2)$  zmiana położenia  $(x_1, x_2)$  ciała względem innego ciała (układu odniesienia).

**Definicja 4.2 — Układ odniesienia .** Ciało (punkt), względem którego określa się spoczynek lub ruch obiektu poddanego obserwacji, np. drzewo, budynek, słup, winda, wagon itd.

Charakterystyczne wielkości opisujące ruch (rys. 4.2):

- tor ruchu - linia, po której odbywa się ruch ciała (samochodu);
- położenie ciała  $x_1, x_2$ ;
- przemieszczenie  $x_1 - x_2$ ;
- droga  $s$ ;
- prędkość  $v$ .



Rysunek 4.2: Wielkości opisujące ruch

## 4.2 Prędkość

Możemy obliczyć średnią prędkość, poruszającego się „czegoś”, jeśli znamy odległość, którą pokonuje i czas potrzebny na wykonanie ruchu. W symbolach jest to zapisane jako:

$$v = \frac{x}{t}$$

gdzie:

$v$  - to średnia prędkość,

$x$  - to odległość podróży w czasie  $t$ .

Poniższe zdjęcie (rys. 4.3) przedstawia Kenenisa Bekele z Etiopii, pozującego obok tablicy wyników, po pobiciu rekordu świata w biegu na 10 000 metrów w 2005 roku. Czas przedstawiony na zegarze, pozwala nam obliczyć jego średnią prędkość w trakcie biegu. Jeśli jego prędkość się zmieniała w trakcie biegu, to równanie daje nam możliwość wyznaczenia tylko jego średniej prędkość. Średnia prędkość jest obliczana w okresie czasu.



Rysunek 4.3: Kenenis Bekele z Etiopii ustanawiający nowy rekord świata w biegu na 10 000 metrów

Jeśli spojrzymy na prędkościomierz w samochodzie, nie zaobserwujemy średniej prędkość samochodu. A raczej zobaczymy prędkość samochodu w danej chwili. Jest to tak zwana **chwilowa prędkość**.

**Ćwiczenie 4.1** Spójrz na rysunek 4.3. Biegacz przebiegł 10 000 m, a zegar pokazuje całkowity czas podczas tego dystansu. Oblicz jego średnią prędkość podczas biegu. ■

## 4.3 Jednostki

W Międzynarodowym Układzie Jednostek Miar (system SI) odległość mierzona jest w metrach (m), a czas w sekundach (s). Dlatego prędkość wyrażona jest w metrach na sekundę (m/s). Istnieje także wiele innych jednostek używanych do określania prędkości. Wybór jednostki zależy od sytuacji. Prawdopodobnie, podając prędkość ślimaka, użyjemy innych jednostek niż do określenia prędkości samochodu. Tablica 4.1 zawiera niektóre alternatywne jednostki prędkości. Zauważmy, że w wielu obliczeniach posługujemy się jednostkami SI (m/s).

cm/s	centymetr na sekundę
m/s	metr na sekundę
km/s	kilometr na sekundę
km/h	kilometr na godzinę

Tablica 4.1: Jednostki prędkości

**Ćwiczenie 4.2** Oto kilka jednostek prędkości **m/s**, **mm/s**, **km/s**, **km/h**. Która z jednostek byłaby odpowiednia, przy określaniu prędkości każdego z poniższych?

- żółw
- samochód
- światło
- biegacz
- samolot

**Ćwiczenie 4.3** Ślimak pełza 12 cm w ciągu minuty. Jaka jest średnia prędkość ślimaka w mm/s?

## 4.4 Określanie prędkości

Można znaleźć prędkość poruszającego się obiektu poprzez mierzenie czasu, potrzebnego na pokonanie odległości między dwoma stałymi punktami. Na przykład niektóre autostrady mają awaryjne telefony co 2 000 m. Używając stopera, można zmierzyć czas przejazdu samochodu na tej odległości. Zauważmy, że tak można określić tylko średnią prędkość samochodu między tymi dwoma punktami. Nie wiadomo, czy samochód zwiększał i zmniejszał swoją prędkość lub czy poruszał się ze stałą prędkością.

## 4.5 Pomiary prędkości

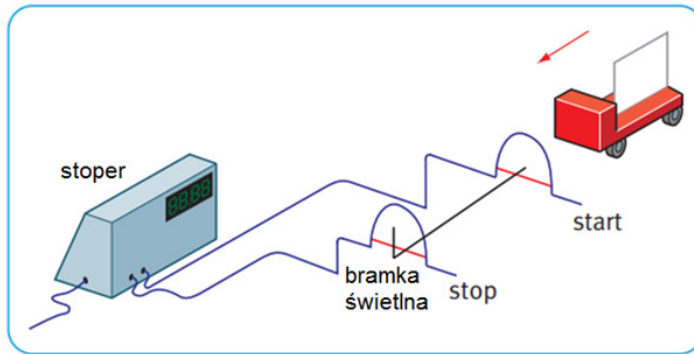
Poniżej kilka różnych sposobów pomiaru prędkości wózka, jadącego po prostej linii. Metody te mogą być przystosowane także do pomiaru prędkości innych, będących w ruchu obiektów.

### Korzystanie z dwóch bramek świetlnych

Krawędź kartki na rysunku 4.4 przecina wiązkę światła, przechodzącą przez pierwszą bramkę świetlną. To automatycznie uruchamia minutnik.



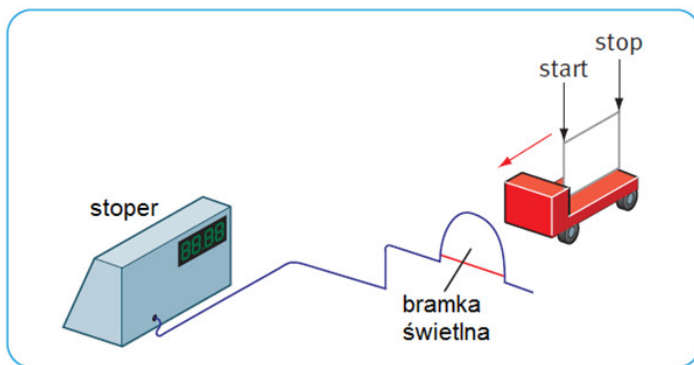
Stoper zatrzymuje się, gdy przód kartki łamie drugą wiązkę. Prędkość wózka oblicza się na podstawie przedziału czasu i odległości między bramkami świetlnymi.



Rysunek 4.4: Użycie dwóch bramek świetlnych do znalezienia średniej prędkości wózka

### Korzystanie z jednej świetlnej bramki

Stoper na rysunku 4.5 uruchamia się, gdy przednia krawędź kartki przerywa wiązkę światła. Zatrzymuje się, gdy tylna krawędź kartki przechodzi przez wiązkę światła. W tym przypadku czas pokazany jest czasem przejazdu wózka, a odległość równa jest długości kartki. Stąd można obliczyć bezpośrednio prędkość, dzieląc odległość przez czas.

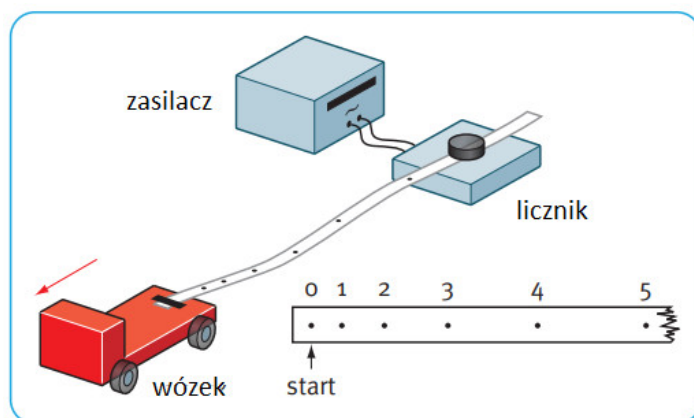


Rysunek 4.5: Użycie pojedynczej bramki świetlnej do znalezienia średniej prędkości wózka

## Korzystanie z licznika czasu

Licznik zegarowy (rys. 4.6) zaznacza kropki na taśmie, w regularnych odstępach czasu, zwykle  $\frac{1}{50}$  s (tj. 0,02 s). Wzór kropek odwzorowuje ruch wózka:

- równe odstępki – stała prędkość,
- zwiększenie odstępki – zwiększenie prędkości.

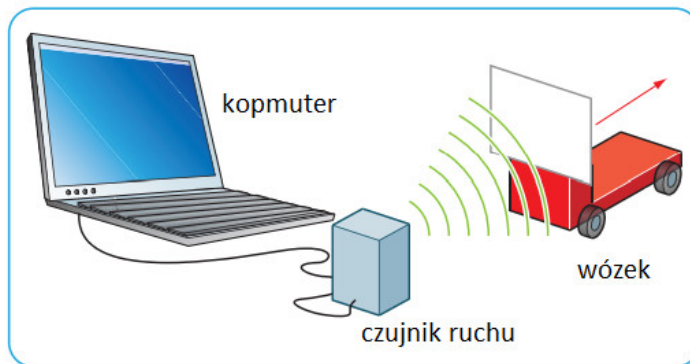


Rysunek 4.6: Korzystanie z licznika czasu do określania ruchu wózka

Teraz można wykonać kilka pomiarów. Jeśli zmierzmy odległość co piąty punkt od początku taśmy, otrzymamy odległość wózka w odstępach 0,1 sekundy.

## Korzystanie z czujnika ruchu

Czujnik ruchu (rys. 4.7) przesyła regularne impulsy na wózek. Aktywny czujnik ruchu swoje działanie opiera na emitowaniu fali elektromagnetycznej (w zakresie mikrofal lub światła widzialnego) albo mechanicznej (ultradźwięki). Analiza, powracającej do urządzenia, odbitej fali, pozwala wykryć ruch, co powoduje uruchomienie instalacji sterowanej takim czujnikiem. Odbicie fali pozwala na określenie czasu, jaki był potrzebny na przebycie drogi do wózka i z powrotem. Z tej informacji możemy wnioskować o odległości wózka od czujnika ruchu. Możesz wygenerować wykres odległość-czas, a następnie, z tego wykresu, określić prędkość wózka.



Rysunek 4.7: Używanie czujnika ruchu do określania ruchu wózka

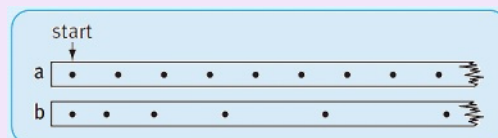
## 4.6 Wybór najlepszej metody

Każda z przedstawionych metod znajdowania prędkości wózka ma swoje wady i zalety. Wybierając metodę, trzeba mieć na uwadze kilka kwestii.

- Czy metoda pomiaru daje średnią wartość prędkości lub czy może służyć do określenia prędkości wózka, w różnych punktach na swojej drodze?
- Jak dokładnie metoda mierzy czas?
- Jak prosta i wygodna jest konfiguracja układu pomiarowego?

**Ćwiczenie 4.4** Wózek z kartką o długości 5 cm przejechał przez pojedynczą bramkę świetlną. Zarejestrowany, przez zegar cyfrowy, czas wynosił 0,4 s. Czy to była średnia prędkość wózka w m/s? ■

**Ćwiczenie 4.5** Rysunek 4.8 przedstawia dwie taśmy informacyjne. Opisz ruch wózków, dla których licznik zegarowy zaznaczył na nich kropki.



Rysunek 4.8: Taśmy informacyjne

**Ćwiczenie 4.6** Wcześniej opisano cztery metody wyznaczania prędkości poruszającego się wózka. Każda metoda może być przystosowana do badania ruchu spadającego ciała. Wybierz dwie metody, które twoim zdaniem byłyby odpowiednie i napisz dla każdej z nich, jak powinna być dostosowana do tego celu. ■

## 4.7 Odległość a przemieszczenie

W fizyce uwielbiamy dokładnie opisywać ruch obiektów. Poważnie, pierwsze kilka rozdziałów, praktycznie każdego podręcznika do fizyki jest poświęconych wyjaśnieniu, jak precyzyjnie opisywać ruch, gdyż jest to bardzo ważne we wszystkich dziedzinach fizyki. Leczą, aby opisać ruch obiektu, musimy najpierw umieć określić jego położenie - czyli wskazać, gdzie się on znajduje w dowolnej chwili. Mówiąc bardziej precyzyjnie, musimy podać jego położenie względem przyjętego układu odniesienia. Ziemia jest często używanym układem odniesienia i często określamy położenie obiektów względem obiektów spoczywających w tym układzie odniesienia. Na przykład, położenie nauczycielki może być określone względem pobliskiej tablicy. Jeśli obiekt porusza się względem układu odniesienia - nauczycielka porusza się w prawo względem tablicy lub pasażer idzie w stronę końca samolotu - położenie obiektu zmienia się. Zmianę położenia nazywamy przemieszczeniem. Słowo przemieszczenie oznacza, że obiekt się poruszył lub innymi słowy przemieścił się.

**Definicja 4.3 — Przemieszczenie.** Definiujemy je jako zmianę położenia obiektu w czasie. Przemieszczenie jest **wektorem**. Oznacza to, że ma ono zarówno kierunek jak i wartość i jest przedstawiane graficznie jako strzałka, o początku w położeniu początkowym i o końcu w położeniu końcowym.

**Definicja 4.4 — Odległość.** To wartość lub długość wektora przemieszczenia między dwoma punktami. Zauważ, że odległość między punktami, to nie to samo, co odległość przebyta między nimi.

Musimy być uważni stosując pojęcie odległości, gdyż ma ono dwa zastosowania w fizyce. Możemy mówić o odległości między punktami lub o odległości przebytej przez obiekt.

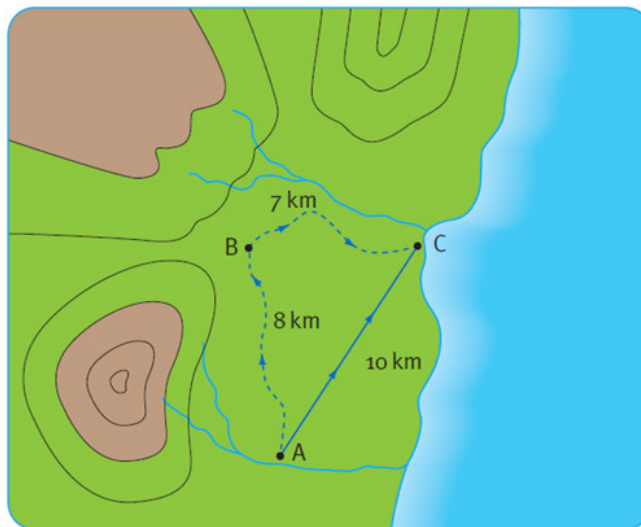
Przebyta odległość to całkowita długość drogi, pokonanej między dwoma punktami. Odległość nie jest wektorem. Nie ma kierunku, wobec tego nie może występować ze znakiem minus. Często zapominamy o znaku minus, w przypadkach, gdy jest on konieczny, czyli w odpowiedzi na pytanie o przemieszczenie. Ma to czasem miejsce, gdy

przez pomyłkę odjęte zostanie położenie końcowe od początkowego, a nie początkowe od końcowego.

Rysunek 4.9 ilustruje różnicę pomiędzy odległością a przemieszczeniem. Ukazuje drogę przemierzaną przez spacerowiczów, gdy wyszli z miasta A do miasta C. Ich kręta trasa przebiegała przez miasto B. W związku z tym, przebyli łączną odległość 15 km. Jednak ich przemieszczenie było znacznie mniejsze, ponieważ pozycja końcowa znajdowała się zaledwie 10 km od miejsca, gdzie rozpoczęli trasę. Aby opisać przemieszczenie spacerowiczów, musimy podać jednocześnie odległości i kierunek:

przemieszczenie = 10 km 30°E od N.

Przemieszczenie jest przykładem **wielkości wektorowej**. Wielkość wektora ma zarówno wartość (rozmiar), jak i kierunek. Z drugiej strony, odległość jest **wielkością skalarną**. Wielkości skalarne posiadają tylko wartość.



Rysunek 4.9: Określenie przemieszczenia i odległości

## 4.8 Szybkość a prędkość

Choć w mowie potocznej szybkość i prędkość uważane są często za swoje zamienniki, w rzeczywistości opisują zupełnie różne pojęcia. **Prędkość** ( $v$ ) jest wielkością wektorową, która mierzy przemieszczenie

(czyli zmianę położenia,  $\Delta s$ ) w danym odcinku czasu ( $\Delta t$ ). Wyrażamy to równaniem:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

gdzie  $v$  i  $\Delta s$  są wielkościami wektorowymi. **Szybkość** (albo tempo,  $u$ ) jest wielkością skalarną, która jest miarą przebytej drogi ( $s$ ) w danym czasie ( $\Delta t$ ). Matematycznie zapisujemy to w postaci równania:

$$u = \frac{s}{\Delta t}.$$

Reasumując, możemy powiedzieć, że wartość prędkości (szybkość) ciała informuje nas o tym, jaką drogę przebywa ciało w jednostce czasu. Natomiast prędkość jako wielkość wektorowa mówi nam o kierunku ruchu ciała, a także, w którą stronę ciało się porusza.

Wielkość	Oznaczenie	Jednostka
odległość	$d$	m
przemieszczenie	$s, x$	m
czas	$t$	s
szybkość, prędkość	$v$	$\text{ms}^{-1}$

Tablica 4.2: Standardowe symbole i jednostki

**Ćwiczenie 4.7** Które ze zdań określają prędkość, szybkość, odległość i przemieszczenie?

- Statek przepłynął 200 kilometrów na południowy zachód.
- Podczas maratonu biegłem, średnio, 7 kilometrów na godzinę.
- Ślimak czołgał się z prędkością 2 mm/s wzdłuż prostej krawędź ławki.
- Przejazd przedstawiciela handlowego, w obie strony, wyniósł 420 km.

## 4.9 Obliczanie prędkości i szybkości

Możemy zapisać równanie prędkości w symbolach:

$$v = \frac{s}{t},$$

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Słownie równanie prędkości to:

$$\text{prędkość} = \frac{\text{zmiana przemieszczenia}}{\text{czas}}.$$

Zauważ, że używamy  $\Delta s$  w znaczeniu „zmiana przemieszczenia”. Symbol  $\Delta$ , grecka litera delta, oznacza zmianę wartości  $s$ . Inny sposób na napisanie  $\Delta s$  to:  $s_2 - s_1$ , ale jest to bardziej czasochłonne i mniej jasne. Równanie prędkości:  $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ , można przestawiać w poniższy sposób, w zależności od tego, jaką wielkość chcemy określać:

$$\text{zmiana przemieszczenia: } \Delta = v \cdot \Delta t,$$

$$\text{zmiana w czasie: } \Delta t = \frac{\Delta s}{v}.$$

Zauważ, że każde z tych równań jest zrównoważone co do jednostek. Rozważmy, na przykład równanie przemieszczenia. Jednostki po prawej stronie to  $\text{m/s} \cdot \text{s}$ , co upraszcza się do  $\text{m}$ , prawidłowej jednostki dla przemieszczenia. Pamiętajmy też, że możemy oczywiście użyć tego samego równania do znajdowania prędkości i odległości, czyli:

$$\text{prędkość: } v = \frac{s}{t},$$

$$\text{odległość: } s = v \cdot t,$$

$$\text{czas: } t = \frac{s}{v}.$$

■ **Przykład 4.1** Samochód jedzie z prędkością  $15 \text{ m/s}$ . Jaką przebędzie odległość w ciągu 1 godziny?

**Krok 1.** Warto zacząć od zapisania, co wiesz i co chcesz wiedzieć:

$$v = 15 \text{ m/s}$$

$$t = 1 \text{ godz.} = 3600 \text{ s}$$

$$s = ?$$

**Krok 2.** Wybierz odpowiednią wersję równania i podstaw wartości. Pamiętaj, aby uwzględnić jednostki:

$$s = v \cdot t = 15 \cdot 3600 = 5,4 \cdot 10^4 \text{ m} = 54 \text{ km}$$

Samochód przejedzie odległość  $54 \text{ km}$  w godzinę. ■

■ **Przykład 4.2** Ziemia krąży wokół Słońca w odległości  $150\,000\,000 \text{ km}$ . Ile czasu potrzebuje światło na przebycie tej drogi? (Prędkość światła w przestrzeni  $= 3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ .)

**Krok 1.** Zacznijmy od napisania tego, co wiemy. Musimy ujednoczyć

jednostki - najlepiej pracować na jednostkach: m i s. Następnie musimy nauczyć się wyrażać liczby w notacji naukowej (przy użyciu potęgi 10).

$$v = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

$$s = 150\,000\,000 \text{ km} = 150\,000\,000\,000 \text{ m} = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

**Krok 2.** Wstawmy wartości w równaniu czasu:

$$t = s/v = (1,5 \cdot 10^{11}) / (3,0 \cdot 10^8) = 500 \text{ s}$$

Światło na podróż potrzebuje 500 s (około 8,3 minuty). ■

## 4.10 Optymalne wykorzystanie jednostek

W powyższych przykładach jednostki zostały pominięte, w krokach pośrednich, w obliczeniach. Czasami jednak pomocne może być uwzględnienie jednostek, ponieważ może to być sposób na sprawdzenie, czy użyliśmy poprawnego równania. Na przykład, że podzieliliśmy jedną wielkości przez drugą, kiedy powinniśmy je pomnożyć. Ponadto, powinniśmy być w stanie wykonywać obliczenia w jednostkach innych niż SI, takich jak kilometry na godzinę, bez konieczności przeliczania na metry i sekundy.

Na przykład, jaką odległość pokona statek kosmiczny, lecący z prędkością 40 000 km/h, w ciągu jednego dnia? Ponieważ doba liczy 24 godziny, mamy:

$$\text{przebyta odległość} = 40\,000 \text{ km/h} \cdot 24 \text{ h} = 960\,000 \text{ km}$$

**Ćwiczenie 4.8** Okręt podwodny używa sonaru do pomiaru głębokości pod nim. Wykrywane są odbite fale dźwiękowe 0,4 s po ich przesłaniu. Jak głęboka jest woda? (Prędkość dźwięku w wodzie = 1500 m/s) ■

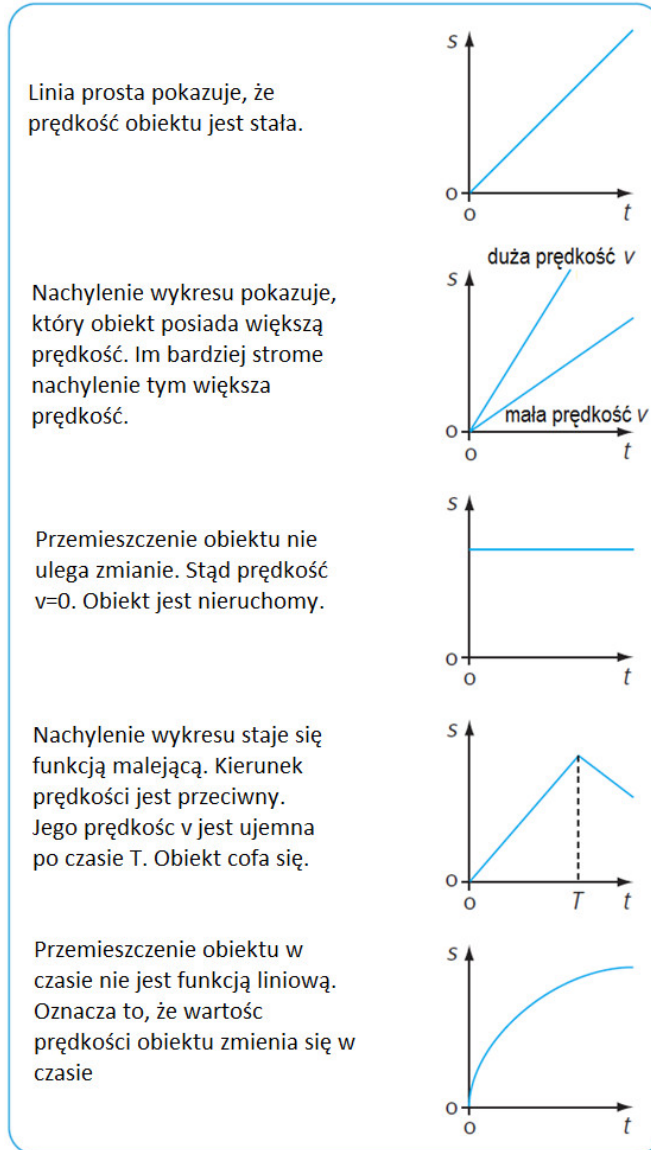
**Ćwiczenie 4.9** Ziemia potrzebuje jednego roku na okrążenie Słońca. Przebyta droga przez Ziemię wynosi  $1,5 \cdot 1\,011 \text{ m}$ . Oblicz jego prędkość. Wyjaśnij dlaczego jest to średnia prędkość. ■

## 4.11 Wykresy przemieszczenia w czasie

Możemy przedstawiać graficznie, zmieniającą się, pozycję poruszającego się obiektu, rysując wykres przemieszczenia w czasie. **Gradient** (nachylenie) wykresu jest równy jego prędkości (rys. 4.10). Im bardziej strome zbocze, tym większa prędkość. Wykres, taki jak ten, może nam również powiedzieć, czy obiekt porusza się do przodu czy do tyłu. Jeśli

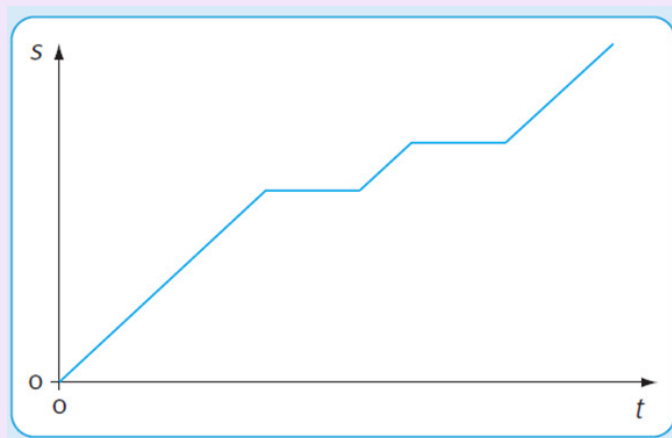


gradient jest ujemny, prędkość obiektu jest ujemna – porusza się do tyłu.



Rysunek 4.10: Nachylenie wykresu przemieszczenia w czasie ( $s - t$ )

**Ćwiczenie 4.10** Wykres przemieszczenia w czasie (rys. 4.11) przedstawia podróż autobusem. Co wykres mówi nam o podróży?



Rysunek 4.11: Przemieszczenie w czasie

**Ćwiczenie 4.11** Naszkicuj wykres przemieszczenia w czasie, aby pokazać kolejne wydarzenia. Wchodząc na posesję, maszerujesz od bramy ze stałą prędkością. Nagle zauważasz byka i zatrzymujesz się. Twój przyjaciel mówi, że nie ma niebezpieczeństwa, więc idziesz ze zmniejszoną stałą prędkością. Byk ryczy, a ty biegniesz z powrotem do bramy.

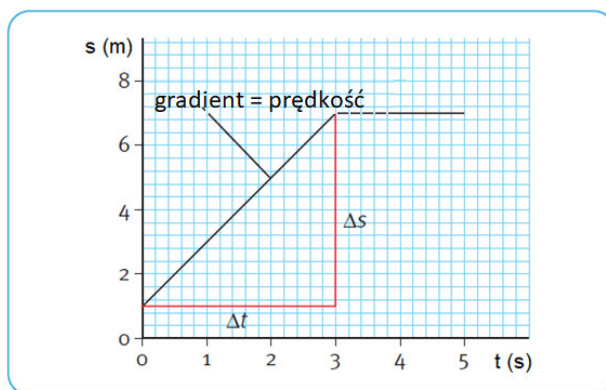
## 4.12 Wprowadzanie prędkości z wykresu przemieszczenia w czasie

Samochodzik porusza się po prostym torze. Jego przemieszczenie, w różnych momentach, przedstawiono w tabeli 4.3. Dane te mogą być użyte do narysowania wykresu przemieszczenia w czasie, z którego możemy wywnioskować o prędkość samochodu.

<b>Przemieszczenie (m)</b>	1.0	3.0	5.0	7.0	7.0	7.0
<b>Czas (s)</b>	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0

Tablica 4.3: Dane dotyczące przemieszczenia ( $s$ ) i czasu ( $t$ ) dla samochodu-zabawki

Warto najpierw spojrzeć na dane, aby zobaczyć wzorec ruchu samochodu. W tym przypadku, przemieszczenie na początku stale rośnie, ale po 3 s pozostaje na stałym poziomie wartości. Innymi słowy, początkowo samochód jedzie ze stałą prędkością, ale potem się zatrzymuje. Teraz możemy wykreślić wykres przemieszczenia w czasie (rys. 4.12).



Rysunek 4.12: Wykres przemieszczenia w czasie dla samochodu zabawki; dane pokazano w tabeli 4.3

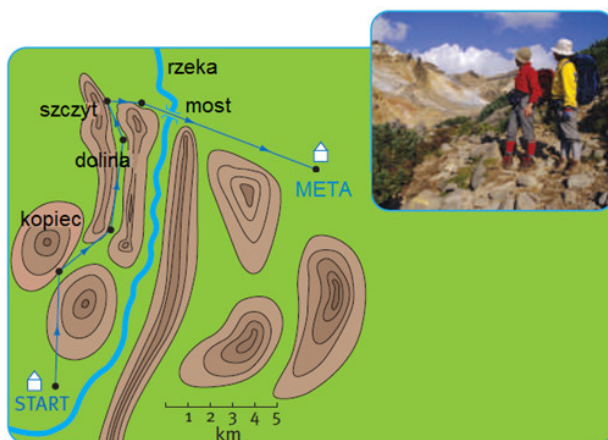
Chcąc obliczyć prędkość samochodu przez pierwsze 3 sekundy, możemy to zrobić, opracowując gradient wykresu, ponieważ prędkość jest równa gradientowi wykresu przemieszczenia-czas. Rysujemy trójkąt prostokątny, jak pokazano na rysunku. Aby znaleźć prędkość samochodu, zmianę przemieszczenia dzielimy przez zmianę czasu. Te wielkości są określone przez dwa boki trójkąta oznaczone jako  $\Delta s$  i  $\Delta t$ .

$$\text{Prędkość} = \frac{\text{zmiana przemieszczenia}}{\text{zmiana w czasie}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(7 - 1)}{(3 - 0)} = \frac{6}{3} = 2 \frac{m}{s}$$

## 4.13 Łączenie przemieszczeń

Piechurzy pokazani na rysunku 4.13 przechodzą przez trudny szlak. Przemierzają się z jednego punktu do następnego, poruszając się po serii prostych linii. Z informacji, zawartych na mapie, można obliczyć odległość i przemieszczenia z punktu początkowego:

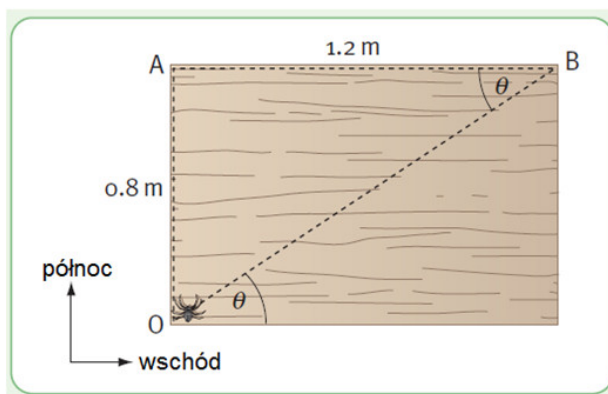
- przebyta odległość = 25 km;
- przemieszczenie = 15 km na północny-wschód.



Rysunek 4.13: Trasa piechurów

Mapa to rysunek w skali. Możesz znaleźć odległość, mierząc odcinki na mapie. Ale jak obliczyć przemieszczenie? Musimy zmierzyć najkrótszą odległość między startem a meta.

■ **Przykład 4.3** Pająk biegnie po dwóch krawędziach stołu OA i AB (rys. 4.14). Oblicz jego przemieszczenie.



Rysunek 4.14: Ruch pająka

**Krok 1.** Ponieważ szukamy przemieszczenia pająka, to interesuje nas wartość długości odcinka OB, który biegnie pod kątem do OA i AB. Odcinki OA i AB tworzą kąt prosty. Możemy dodać więc dwa przemieszczenia za pomocą twierdzenia Pitagorasa:

$$OB^2 = OA^2 + AB^2 = 0.8^2 + 1.2^2 = 2.08$$

$$OB = 2.08^{\frac{1}{2}} = 1.44 \text{ m} \approx 1.4 \text{ m}$$

**Krok 2.** Przemieszczenie jest wektorem. Mamy wartość tego wektora, ale teraz musimy znaleźć jego kierunek. Kąt  $\Theta$  można wyznaczyć przez:

$$\operatorname{tg}\Theta = \frac{OA}{AB} = \frac{0.8}{1.2} = 0.667$$

$$\Theta = \operatorname{tg}^{-1}(0.667) = 33.7^\circ \approx 34^\circ$$

Zatem przemieszczenie pająka wynosi 1.4 m pod kątem  $34^\circ$  na północny wschód.

■





## 5. Właściwości materiałów i ich badanie

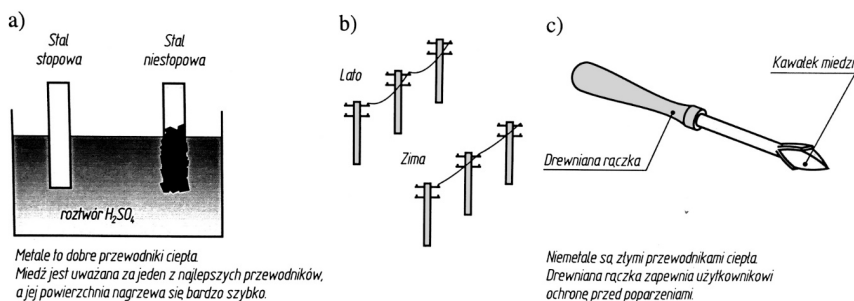
*Wiesław Żelasko*

### 5.1 Wprowadzenie

Z właściwościami różnych substancji można spotkać się, wielokrotnie, na lekcjach fizyki, chemii czy też w życiu codziennym. Są to cechy, które mogą być przedmiotem kształtowania i prowadzonych badań doświadczalnych z zakresu materiałoznawstwa. Do najważniejszych właściwości materiałowych należą:

- właściwości fizyczne i chemiczne;
- właściwości eksploatacyjne;
- właściwości technologiczne.

Do **właściwości chemicznych** zalicza się, przede wszystkim, skład chemiczny materiałów, odporność na utlenianie, odporność na działanie związków chemicznych i korozji. **Właściwości fizyczne** charakteryzuje, m.in. rozszerzalność cieplna, temperatura topnienia czy przewodnictwo cieplne. Znajomość **właściwości fizykochemicznych** można wykorzystać do wytwarzania, np. zabawek z materiałów o małej gęstości, którym może być styropian lub drewno. Parametry tych materiałów można znaleźć w różnego rodzaju poradnikach i tablicach, gdzie uzyskane wyniki zostały opracowane w oparciu o przeprowadzone badania.



Rysunek 5.1: Przykładowe właściwości materiałów

**Właściwościami mechanicznymi** określa się te cechy materiałów, które decydują o odporności metali i stopów na działanie różnych obciążeń, powodujących różnego rodzaju odkształcenia lub pęknięcia. Natomiast przydatność materiału do określonego rodzaju procesów technologicznych, np. odlewania, tłoczenia, spawania, hartowania, obróbki skrawaniem itp., charakteryzują **właściwości technologiczne**. Z kolei **właściwości eksploatacyjne** to cechy materiałów, określające jego trwałość w warunkach użytkowania.

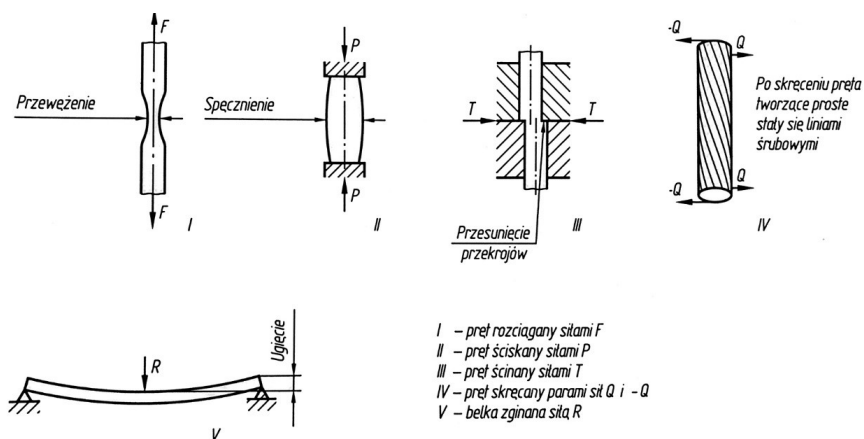
## 5.2 Właściwości mechaniczne materiałów

Jednym z pierwszych etapów wytwarzania jest odpowiedni dobór materiałów na produkowane wyroby, które w przyszłości będą pracować w różnych warunkach. Podczas użytkowania, materiał musi, przede wszystkim, przeciwstawić się działaniu sił zewnętrznych, zmiennej temperatury czy działaniu korozji.

Takimi siłami zewnętrznymi mogą być obciążenia statyczne, działające w stanie równowagi, np. książka położona na biurku. Mogą również występować obciążenia dynamiczne, spowodowane przez poruszające się elementy, np. samochód wjeżdżający na most, młotek do wbijania gwoździ czy poruszające się tłoki w silniku. Z punktu widzenia potencjalnych użytkowników, wspomnianych wyrobów, najbardziej istotne jest to, aby żaden ze wspomnianych elementów nie uległ zniszczeniu.

To jak dany materiał będzie się zachowywał, pod wpływem różnych obciążeń zewnętrznych, można określić na podstawie jego właściwości mechanicznych. Pozwalają one, przede wszystkim, na wyznaczenie zakresu obciążeń dla różnych metali, tworzyw sztucznych czy materiałów ceramicznych.





Rysunek 5.2: Rodzaje obciążeń i odkształceń występujących w materiałach

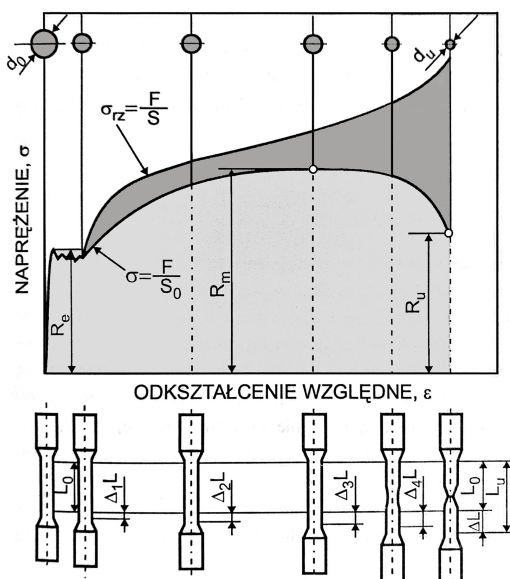
Badania właściwości materiałów, co niezwykle istotne, przeprowadzane są według określonych reguł i zasad, które nazywamy **normami**. Warunki, w których dokonywana jest ich analiza jakościowa, powinny być porównywalne z realnymi warunkami pracy, wytwarzanych z nich, w kolejnych etapach, urządzeń oraz produktów użytkowych. Do najczęściej stosowanych badań właściwości mechanicznych materiałów należą:

- statyczna próba wytrzymałości na rozciąganie, ściskanie, zginanie i skręcanie;
- statyczne metody pomiaru twardości;
- badania dynamiczne udarności;
- badania wytrzymałości zmęczeniowej.

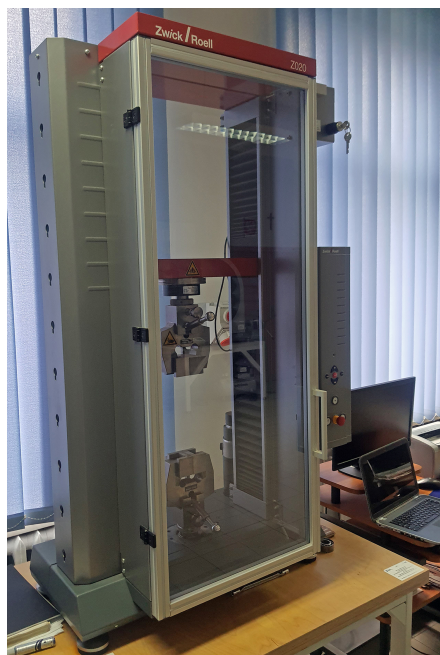
## 5.3 Statyczna próba rozciągania

Podstawowym badaniem wytrzymałości materiałów jest statyczna próba rozciągania. Jej główną zaletą jest możliwość jednoczesnego wyznaczenia dużej liczby wskaźników.

Próba rozciągania jest przeprowadzana na maszynach wytrzymałościowych, które mają możliwość określenia zależności pomiędzy występującym obciążeniem, a odkształceniem. Podczas badań rejestrowana jest siła rozciągająca  $F$  [N] i wydłużenie obciążonej próbki  $\Delta l$  [mm]. Pozwala to na określenie wartości występujących naprężeń i wskaźników wytrzymałościowych.

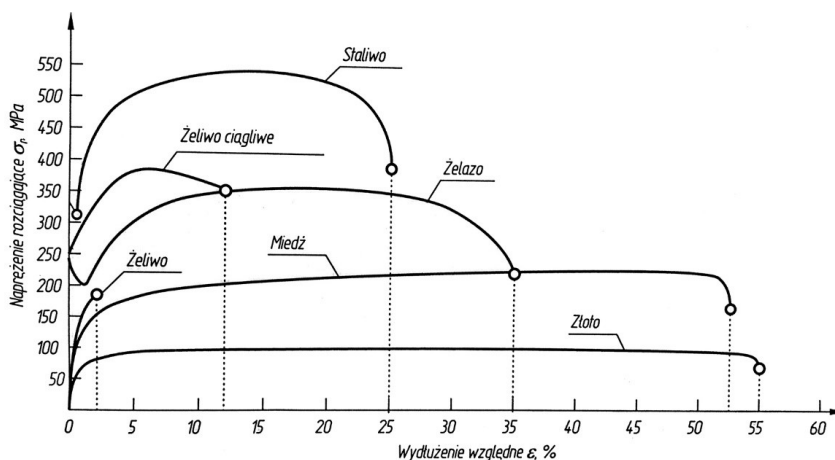


Rysunek 5.3: Schemat zjawisk zachodzących podczas próby rozciągania



Rysunek 5.4: Maszyna wytrzymałościowa stosowana do przeprowadzania próby rozciągania

W zależności od rodzaju rozciąganego materiału, krzywe rozciągania mogą przyjmować różny kształt, co przedstawiono na rysunku 5.5.



Rysunek 5.5: Wykresy rozciągania dla różnych materiałów

## 5.4 Próby twardości materiałów

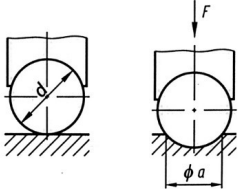
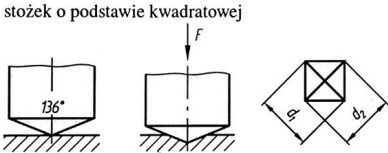
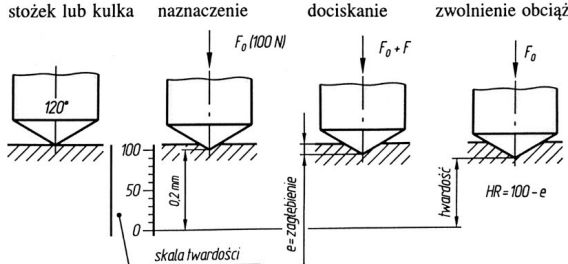
**Twardość** to opór, jaki stawia materiał, podczas wciskania w niego innego materiału lub jego zarysowania. Pomiary twardości są bardzo często stosowane do określania właściwości materiałów po obróbce cieplnej, narzędzi skrawających itp. Najszersze zastosowanie znalazły:

- statyczne metody pomiaru twardości, polegające na wgniataniu wgłębnika w badany materiał z siłą, zapewniającą uzyskanie trwałego odcisku - są to metody Brinella, Rockwella, Vickersa;
- dynamiczne metody pomiaru twardości, podczas których opór materiału może być spowodowany działaniem obciążenia udarowego, np. metoda Shore'a lub Poldiego;
- zarysowania, w których opór materiału przy zarysowaniu ma wpływ na jego twardość.

### Statyczne metody pomiaru twardości

1. **Metoda Brinella (HB)** – polega na wgniataniu, z określoną siłą  $F$ , w badany materiał twardej kulki stalowej o średnicach 10, 5, 2,5 lub 1 mm. Jest często stosowana do pomiaru twardości stopów żelaza i metali nieżelaznych.

2. **Metoda Rockwella (HRC, HRB)** – polega na wciskaniu stożka diamentowego o kącie wierzchołkowym  $120^\circ$ , przy dwustopniowym obciążeniu  $0,1 + 1,4$  kN lub stalowej kulki o średnicy  $1/16''$  i obciążeniu  $0,1 + 0,9$  kN. Określenie twardości sprowadza się do pomiaru głębokości odcisku, której wartość jest odczytywana bezpośrednio z urządzenia. Podczas pomiaru stożkiem twardość oznacza się symbolem HRC, natomiast przy pomiarze kulką twardość oznacza się symbolem HRB. Metoda ta jest często stosowana do określania właściwości przedmiotów po obróbce cieplnej i narzędzi skrawających.
3. **Metoda Vickersa** – polega na wciskaniu w materiał, piramidki diamentowej o podstawie kwadratowej i kącie wierzchołkowym  $136^\circ$ . Umożliwia ona badanie twardości cienkich powłok i przedmiotów o niewielkiej grubości.

Metoda	Symbol	Zasada pomiaru
Brinell	HB	<p>kulka o średnicy <math>d</math></p>  $HB = \frac{0,102 \times 2F}{S}$ $S = \frac{\pi d}{2} (d - \sqrt{d^2 - a^2})$ <p>(<math>F</math> w N, <math>a</math> i <math>d</math> w mm)</p>
Vickers	HV	<p>stożek o podstawie kwadratowej</p>  $HV = 0,189 \frac{F}{d^2}$ <p>(<math>F</math> w N, <math>d_1, d_2</math> w mm)</p>
Rockwell	$\left\{ \begin{array}{l} HR_C \\ HR_B \end{array} \right.$	<p>stożek lub kulka    naznaczenie    dociskanie    zwolnienie obciążenia</p>  <p>skala twardości</p> <p><math>e = \text{zagłębienie}</math></p> <p>twardość</p> $HR = 100 - e$

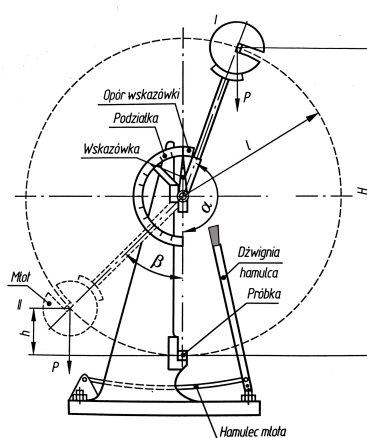
Rysunek 5.6: Statyczne metody pomiaru twardości



Rysunek 5.7: Stanowisko do badania twardości materiałów

## 5.5 Pomiar udarności materiałów

Wiele części maszyn i urządzeń pracuje pod zmiennym obciążeniem. Dlatego też, takie elementy są poddawane próbom udarności, polegającym na łamaniu (zginaniu udarowym) znormalizowanej próbki, jednokrotnym uderzeniem młota wahadłowego.

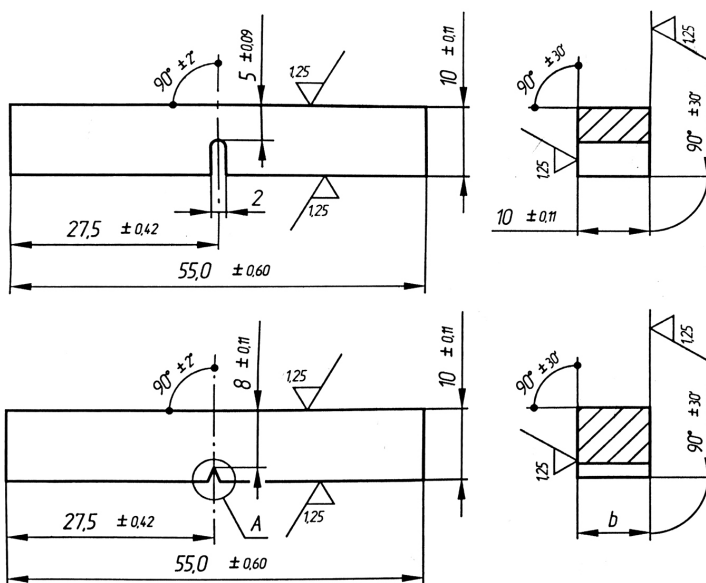


Rysunek 5.8: Stanowisko do badania udarności materiałów

Udarność można zdefiniować jako stosunek pracy do przekroju poprzecznego próbki. Można ją wyznaczyć z następującej zależności:

$$KC = \frac{K}{S_0} \left[ \frac{J}{\text{cm}^2} \right].$$

Udarność oznacza się KCU, KCV, KCT w zależności od kształtu karbu znajdującego się na badanej próbce.

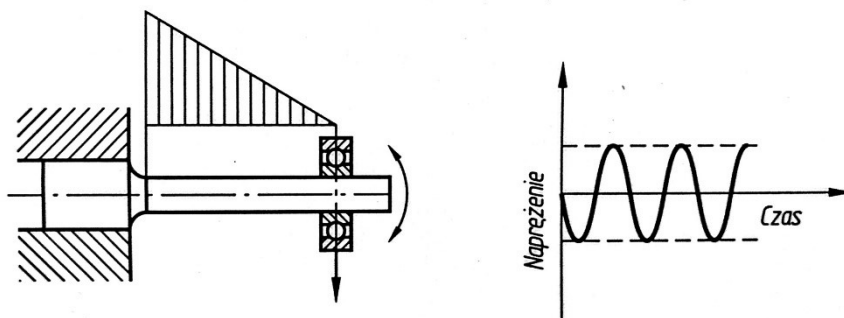


Rysunek 5.9: Próbki do badania udarności

Na udarność ma wpływ także temperatura i dlatego, takie elementy jak szyny kolejowe, spoiny konstrukcji budowlanych, łopatki turbin są poddawane badaniom zarówno w obniżonych, jak i podwyższonych warunkach pracy.

## 5.6 Badania zmęczeniowe materiału

Najczęściej występujące, podczas eksploatacji, zniszczenia ruchomych części maszyn są spowodowane zmęczeniem materiału. Stanowią one 90% wszystkich występujących uszkodzeń. Najbardziej niebezpieczne są obciążenia, które wahają się od wartości dodatnich do ujemnych, tzn. jeżeli pręt jest na przemian ściskany i rozciągany. Wtedy może wystąpić zmęczenie materiału, powodujące jego pęknięcie.



Rysunek 5.10: Badania zmęczeniowe materiałów

## 5.7 Właściwości technologiczne metali i ich stopów

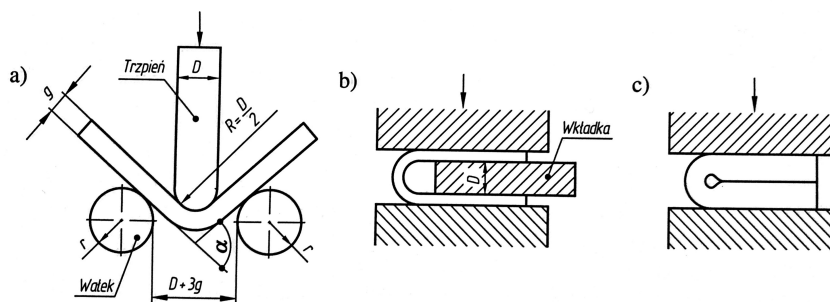
Ocena przydatności materiału, do wykonywania z niego wyrobów codziennego użytku, wymaga nie tylko znajomości jego właściwości wytrzymałościowych. Ponieważ w procesach wytwarzania części maszyn można wykorzystać różne technologie, np. odlewanie, obróbka skrawaniem czy obróbka plastyczna, niezwykle ważna jest znajomość właściwości technologicznych.

Właściwości technologiczne określają zachowanie się materiału w procesach, prowadzących do wykonania gotowego wyrobu. Zalicza się do nich plastyczność, skrawalność, spawalność, lejniść i hartowność.

**Definicja 5.1 — Plastyczność.** To właściwość, określająca możliwość zmiany kształtu materiału, za pomocą wywieranej na niego siły, np. walcowania, kucia, tłoczenia itp. Plastyczność materiału zależy od jego budowy wewnętrznej, twardości i temperatury.

Materiały miękkie są plastyczne na zimno i zwiększają swoją plastyczność podczas nagrzewania. Materiały twarde i kruche nie mogą być poddawane obróbce plastycznej, ponieważ mają skłonność do pęknięcia. Blachy, wykonane z tego samego gatunku stali, mogą się różnie zachowywać podczas procesu tłoczenia. W zależności od sposobu walcowania i zastosowanej obróbki cieplnej, można uzyskać wyroby o dobrej plastyczności lub ze śladami pęknięcia.

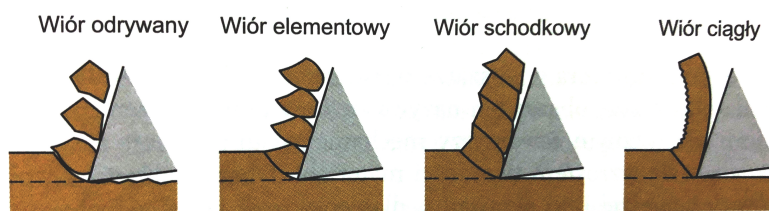
Jedną z praktycznych miar plastyczności jest wartość kąta, o jaki można zgiąć próbkę, bez spowodowania pęknięcia. Materiały o dużej plastyczności są poddawane próbie wielokrotnego przeginania, a miarą plastyczności jest liczba przegięć, wykonanych do pojawienia się pierwszych pęknięć.



Rysunek 5.11: Technologiczna próba zginania

**Definicja 5.2 — Skrawalność.** To podatność materiału do obróbki narzędziami skrawającymi. W dużym stopniu zależy ona od budowy wewnętrznej materiału i jego składu chemicznego. Skrawalność określają trwałość ostrza narzędzia, opór skrawania, gładkość powierzchni oraz postać powstającego wióra.

Materiały twarde i kruche obrabia się trudniej niż miękkie i plastyczne. Jednak materiały miękkie nie odznaczają się dobrą skrawalnością, ponieważ powstające odpady (wióry) oblepiają ostrze narzędzia skrawającego. Powstające zjawisko nazywamy narostem. Najczęściej dobra skrawalność występuje w materiałach, które nie odznaczają się dobrymi właściwościami mechanicznymi.



Rysunek 5.12: Rodzaje wiórów powstających podczas obróbki skrawaniem

**Definicja 5.3 — Lejność.** Jest to cecha metali i stopów używanych w odlewnictwie. Właściwości odlewnicze charakteryzują przydatność materiału do wykonywania odlewów.

Podstawowymi właściwościami odlewniczymi są:

- lejność, która decyduje o dobrym wypełnieniu formy ciekłym metalem i otrzymaniu odlewu o dobrych właściwościach użytko-



wych. Na tę właściwość ma wpływ temperatura ciekłego metalu, jego rzadkoplątność po roztopieniu oraz skład chemiczny;

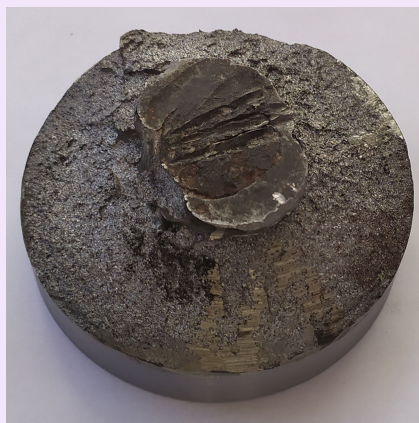
- skurcz odlewniczy, czyli właściwość decydująca o powstawaniu w odlewie naprężeń, mogących powodować jego pęknięcia, odkształcenia, powstawanie jam skurczowych, porowatość itp.

**Definicja 5.4 — Spawalność.** Jest miarą przydatności do wykonania połączeń spawanych i ma wpływ na proces tworzenia spoiny.

Stale o niskiej zawartości węgla, charakteryzują się dobrą spawalnością. Spawanie stali węglowych i stopowych jest znacznie trudniejsze, a brak znajomości tego faktu może powodować poważne awarie w konstrukcjach spawanych. Ocena spawalności może odbywać się na podstawie wielu technologicznych prób pęknięcia i odkształceń materiału.

## 5.8 Ćwiczenie do samodzielnego wykonania

**Ćwiczenie 5.1** Na podstawie oględzin pękniętego metalu, można stwierdzić, czy zniszczenie części nastąpiło w wyniku przekroczenia naprężeń dopuszczalnych, czy też zmęczenia materiału. Pęknięcie, w wyniku działających zewnętrznych obciążeń, przechodzi na granicach ziaren, a na przełomie można zaobserwować ostre krawędzie poszczególnych kryształów. Przełom, powstający w wyniku naprężeń zmęczeniowych, na dużej części obserwowanej powierzchni jest gładki.



Rysunek 5.13: Przełom materiałowy

Można również ocenić skłonność materiału do kruchości na zimno, na podstawie wyglądu jego przełomu. Przełom ciągliwy jest matowy z popielatym odcieniem. Podczas obniżania się temperatury udarność materiału maleje, wtedy można zaobserwować błyszczący przełom. ■



## 6. Statystyka dla fizyka

*Andrzej Chmielowiec*

### 6.1 Wstęp

Fizyka nieodzownie związana jest z przeprowadzaniem doświadczeń i eksperymentów, które mają na celu badanie różnego rodzaju zjawisk. Podczas dużej części doświadczeń konieczne jest wykonywanie pomiarów pozwalających na weryfikację prawdziwości postawionych wcześniej tez. Skąd jednak pewność, czy zmierzona wielkość faktycznie taka jest. A może podczas pomiaru wystąpił jakiś błąd, który zaburzył odczytany wynik? Ile należy wykonać pomiarów, aby z dużym prawdopodobieństwem stwierdzić, że badana wielkość ma taką, a nie inną wartość? Czy wiadomo nam coś na temat błędu, który popełniamy podczas pomiaru? To tylko niektóre pytania, które stawia sobie fizyk podczas wykonywania eksperymentów. Z pomocą w takich sytuacjach przychodzi statystyka.

Można powiedzieć, że statystyka jest to dziedzina matematyki zajmująca się wyciąganiem wniosków, dotyczących ogółu, na podstawie badanej próby. Aktualnie jej metody znajdują zastosowanie niemal w każdej gałęzi nauki i gospodarki. Znaczenie tej dziedziny staje się z roku na rok coraz większe. Należy też przypuszczać, że w kolejnych latach będzie jeszcze rosło. Wynika to, przede wszystkim, z faktu wykorzystania metod statystyki i rachunku prawdopodobieństwa w uczeniu maszynowym i sztucznej inteligencji.

O obszarach zastosowania metod statystycznych powstało już bardzo wiele podręczników i książek. Co zatem można zaprezentować na kilku stronach niniejszego rozdziału, aby przybliżyć czytelnikowi sposób działania statystyki? Wydaje się, że zasadnym będzie tu przedstawienie podstawowych koncepcji, które stanowią fundament tej nauki i sprawiają, że jest ona tak powszechnie wykorzystywana. Wszystko to zostanie zaprezentowane w kontekście prostych pomiarów fizycznych, które czytelnik może przeprowadzić samodzielnie w warunkach domowych.

## 6.2 Statystyka, a prawdopodobieństwo

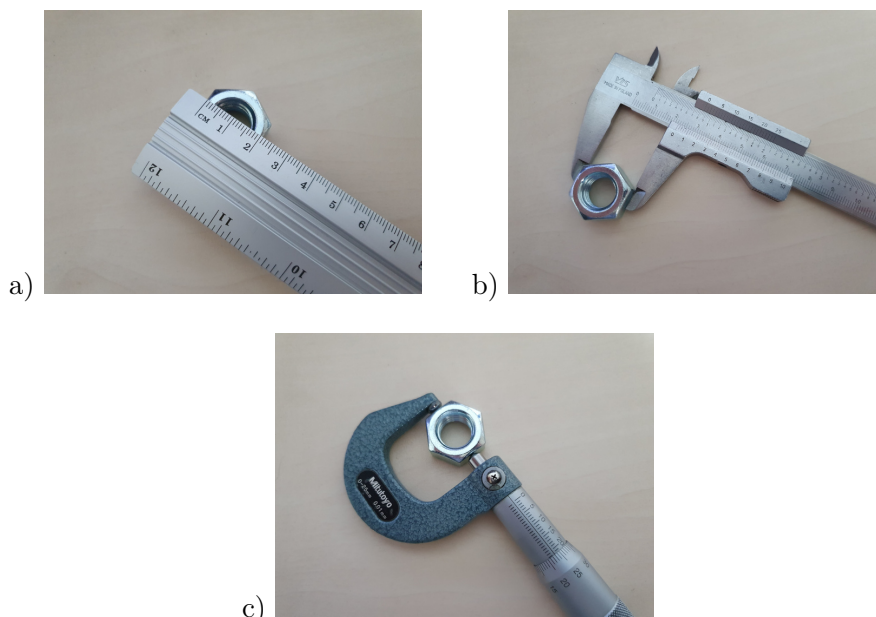
Rozważania w tej części rozpoczniemy od jednego z najbardziej znanych cytatów, który dotyczy statystyki. Mark Twain powiedział kiedyś, że

*Są trzy rodzaje kłamstw: kłamstwa, bezczelne kłamstwa i statystyki.*

Ta niezwykle trafna wypowiedź ma uzmysławiać nam, jak wielkie pole do nadużyć stwarza statystyka. Podkreślić jednak należy, że nadużycia te możliwe są w głównej mierze przez powszechne niezrozumienie, czym jest ta nauka i w jaki sposób odpowiada na pytania. Pierwszą i zasadniczą kwestią, jaką należy sobie uzmysłwić jest to, że statystyka **nigdy** nie daje odpowiedzi **na pewno**. Bardzo często w mediach pojawiają się na przykład statystyki dotyczące badania preferencji wyborczych. Po podaniu wyników widz lub czytelnik jest informowany, że badanie przeprowadzono na próbie liczącej nieco ponad tysiąc osób, a dopuszczalny błąd badania wynosi 3%. Czy to oznacza, że podane wyniki mogą się różnić jedynie o  $\pm 3\%$ ? Każdy z nas czuje podświadomie, że jeśli przebadano jedynie tysiąc osób z prawie 30 milionów uprawnionych do głosowania, to w zasadzie ten błąd może być dużo większy. I tak rzeczywiście jest – błąd może być dużo większy niż te wspomniane 3%. Większość osób nazywa, w tym momencie, statystykę kłamstwem, choć to nie wina tej nauki, że przekazuje się nam niekompletną informację. Prawidłowa informacja powinna brzmieć na przykład, że maksymalny błąd wynosi  $\pm 3\%$  z prawdopodobieństwem 95% (pamiętajmy, że statystyka nigdy nie daje odpowiedzi na pewno, czyli na 100%).

Nie powinniśmy mylić statystyki z prawdopodobieństwem. To drugie dotyczy analizy własności, która obowiązuje całą populację – wszystkie możliwe zdarzenia. Natomiast statystyka, to wnioskowanie o prawdopodobieństwie na podstawie analizy próbki. Siłą rzeczy nie

## 6.3 Pomiary fizyczne i wyznaczanie podstawowych statystyk 77



Rysunek 6.1: Pomiar śruby przy użyciu: a) linijki z dokładnością do  $10^{-3}$  m, b) suwmiarką z dokładnością do  $2 \cdot 10^{-5}$  m, c) mikrometrem z dokładnością do  $10^{-5}$  m

mogą więc to być wnioski pewne. Jedyne, co można w takiej sytuacji zrobić, to minimalizować prawdopodobieństwo popełnienia błędu. Nie obrażamy się zatem na statystykę, tylko podchodzimy prezentowanych za jej pomocą wniosków z należyтым zrozumieniem i rezerwą.

### 6.3 Pomiary fizyczne i wyznaczanie podstawowych statystyk

Pomiaru wielkości fizycznych możemy dokonywać za pomocą różnych przyrządów. Każdy taki przyrząd charakteryzuje się pewnym poziomem dokładności. Na Rysunku 6.1 pokazano pomiar nakrętki za pomocą linijki, suwmiarki i mikrometru. Każdy z zaprezentowanych przyrządów charakteryzuje się inną precyzją pomiaru. Najmniej dokładna jest linijka, której podziałka pozwala na pomiar odległości z dokładnością do  $10^{-3}$  m. Suwmiarka analogowa umożliwia pomiary z dokładnością do  $2 \cdot 10^{-5}$  m. Najdokładniejszy z całej trójki jest natomiast mikrometr, który pozwala mierzyć odległość z dokładnością  $10^{-5}$  m. Aby zilustrować możliwości zastosowania statystyki, do pomiarów

Typ nakrętki	Zmierzone wymiary [mm]
M10	16.77, 16.79, 16.76, 16.76, 16.79, 16.80, 16.77, 16.75, 16.78, 16.79, 16.80, 16.76, 16.78, 16.79, 16.80, 16.78, 16.77, 16.77, 16.76, 16.77, 16.78, 16.80, 16.76, 16.77, 16.78, 16.79, 16.77, 16.78, 16.79, 16.76
M12	18.75, 18.74, 18.80, 18.76, 18.73, 18.77, 18.75, 18.76, 18.76, 18.74, 18.78, 18.77, 18.76, 18.75, 18.78, 18.75, 18.77, 18.77, 18.74, 18.76, 18.79, 18.79, 18.76, 18.75, 18.78, 18.76, 18.73, 18.78, 18.73, 18.76
M14	21.71, 21.72, 21.72, 21.71, 21.72, 21.73, 21.72, 21.70, 21.72, 21.71, 21.73, 21.71, 21.72, 21.71, 21.72, 21.79, 21.81, 21.77, 21.70, 21.74, 21.72, 21.73, 21.73, 21.73, 21.78, 21.78, 21.79, 21.80, 21.81, 21.80

Tablica 6.1: Wyniki pomiaru odległości pomiędzy przeciwległymi ściankami dla zestawów nakrętek M10, M12 i M14.

wykorzystany został mikrometr. Przy jego pomocy zmierzone zostały zestawy sześciokątnych nakrętek M10, M12 i M14. Przeprowadzone eksperymenty dały wyniki, które zaprezentowano w Tabeli 6.1. Jak widać, wyniki każdego eksperymentu obejmują 30 pomiarów, wykonanych na zestawach 10 nakrętek (pomiarowi poddana została odległość pomiędzy każdą parą przeciwległych ścianek nakrętki). Odległość pomiędzy przeciwległymi ściankami dla takich nakrętek określa norma DIN 934 i wynosi ona dla nakrętek M10, M12 i M14 odpowiednio 17 mm, 19 mm i 22 mm.

**Ćwiczenie 6.1** Kup w sklepie budowlanym zestaw nakrętek i zmierz odległość pomiędzy przeciwległymi ściankami za pomocą mikrometru lub suwmiarki. Zauważ, że do wykonania tego ćwiczenia kompletnie nie nadaje się linijka. Jej dokładność jest zbyt mała, żeby uchwycić tak drobne różnice w wymiarach. ■

Gdy dysponujemy wynikami pomiarów, możemy przystąpić do wyznaczania statystyk. Statystyki, to funkcje, których argumentami są wyniki pomiarów. Jedną z najpowszechniej stosowanych statystyk jest

średnia arytmetyczna z próby, która wyraża się wzorem

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n},$$

gdzie  $n$  jest liczbą pomiarów, a  $x_1, x_2, \dots, x_n$  oznaczają uzyskane wyniki. Średnia arytmetyczna jest tak zwanym estymatorem wartości oczekiwanej, który najczęściej oznaczany jest przez  $\hat{\mu}$ .

**Definicja 6.1** Estymatorem nazywamy statystykę, służącą do szacowania wartości parametru rozkładu prawdopodobieństwa w danej populacji.

■ **Przykład 6.1** W naszym eksperymencie pomiarowym pobraliśmy pewną próbkę nakrętek. Na podstawie dokonanych pomiarów chcielibyśmy oszacować, jaka jest wartość oczekiwana odległości pomiędzy ściankami nakrętki. W tym celu przyjmujemy, że estymatorem  $\hat{\mu}$  tej wartości oczekiwanej jest średnia arytmetyczna  $\bar{x}$  z pomiarów. Aby jednak cały wywód był kompletny musimy założyć pewien rozkład prawdopodobieństwa dla zmiennej losowej, która określa odległości pomiędzy ściankami. Dla pomiarów fizycznych, najczęściej zakłada się, że rozkład prawdopodobieństwa takiej zmiennej jest rozkładem normalnym (czym jest rozkład normalny napiszemy później). ■

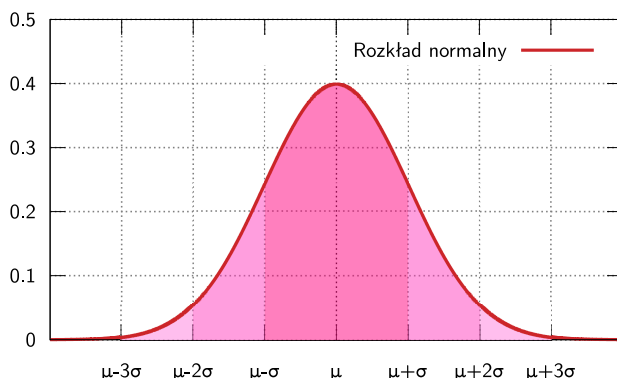
Kolejną typową statystyką, którą wyznaczamy dla serii pomiarów jest odchylenie standardowe, a raczej jego estymator. Jego zadaniem jest wyrażenie pewnej miary błędu, który jest popełniany podczas przeprowadzania eksperymentu:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n - 1}}.$$

Niekiedy używany jest też estymator, dla którego w mianowniku pojawia się  $n$ , a nie  $(n - 1)$ . Niemniej ten, który został zapisany ma w pewnym sensie lepsze własności matematyczne i statystyczne. Niestety dokładne wyjaśnienie tego, dlaczego tak się dzieje znacznie wykracza poza ramy niniejszego rozdziału.

Przy użyciu standardowych funkcji arkusza kalkulacyjnego, możemy z łatwością wyznaczyć estymatory wartości oczekiwanej i odchylenia standardowego dla wykonanego eksperymentu pomiarowego. W przypadku danych z Tabeli 6.1 wynoszą one odpowiednio:

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{M10} &= 16.78, & \hat{\sigma}_{M10} &= 0.014, \\ \hat{\mu}_{M12} &= 18.76, & \hat{\sigma}_{M12} &= 0.018, \\ \hat{\mu}_{M14} &= 21.74, & \hat{\sigma}_{M14} &= 0.036. \end{aligned}$$



Rysunek 6.2: Funkcja gęstości prawdopodobieństwa rozkładu normalnego  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ .

**Ćwiczenie 6.2** Wprowadź dane z wykonanych przez siebie pomiarów do arkusza kalkulacyjnego i wyznacz średnią arytmetyczną oraz odchylenie standardowe dla każdej serii pomiarów. ■

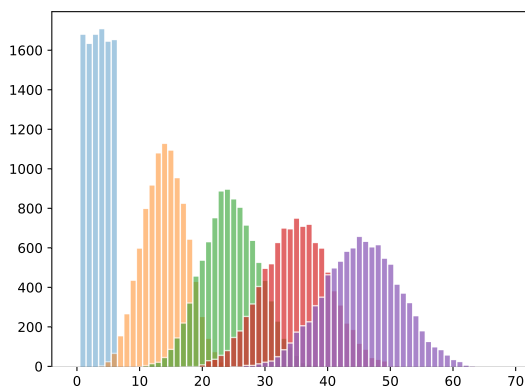
## 6.4 Rozkład normalny i błędy pomiarowe

Rozkład normalny jest rozkładem opartym na dwóch parametrach. Są nimi wartość oczekiwana  $\mu$  oraz odchylenie standardowe  $\sigma$ . Funkcja gęstości prawdopodobieństwa dla rozkładu normalnego  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  wyraża się wzorem

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

Wykres przebiegu tej funkcji został pokazany na Rysunku 6.2. Dlaczego rozkład normalny jest taki ważny? Okazuje się, że jeśli analizujemy wiele niezależnych zmiennych losowych, to rozkład sumy tych zmiennych losowych *przypomina*, w pewnym sensie właśnie, rozkład normalny. Zilustrujemy tę prawidłowość na przykładzie rzutu sześcienną kostką do gry. Wyobraźmy sobie, że wykonujemy rzut 1, 4, 7, 10 i 13 kostkami. Po każdym rzucie sumujemy liczbę oczek, która pojawi się na kostkach. Jeżeli powyższy eksperyment powtórzymy 10 000 razy, to powinniśmy umieć wywnioskować coś na temat rozkładu prawdopodobieństwa w takich doświadczeniach. Przy rzucie jedną kostką rozkład powinien być, mniej więcej, równomierny. Wynika to z faktu, że każdą możliwą sumę uzyskujemy jedynie na jeden sposób. W przypadku rzutu 4 kostkami





Rysunek 6.3: Rozkład normalny prawdopodobieństwa

jest już jednak inaczej. Liczbę oczek równą 4 uzyskujemy bowiem tylko na jeden sposób, liczbę oczek równą 5 na 4 sposoby, a liczbę oczek równą 6 na 10 sposobów itd. Wyniki symulacji komputerowej tego procesu przedstawione zostały na Rysunku 6.3. Przedstawione histogramy pokazują ile razy (oś rzędnych) podczas 10 000 rzutów wypadła określona liczba oczek (oś odciętych). Z rysunku wynika jasno, że im więcej kostek, tym bardziej przedstawiony histogram przypomina swoim kształtem krzywą gęstości rozkładu normalnego. Ta obserwacja została matematycznie sformalizowana i nosi nazwę *Centralnego Twierdzenia Granicznego*.

Podczas pomiarów fizycznych mamy do czynienia z podobną sytuacją. Wykonujemy eksperyment w sytuacji, gdy wpływa na niego wiele losowych i niezależnych czynników, które nakładają się na siebie. Nie mamy wiedzy na temat każdego z nich z osobna, ale Centralne Twierdzenie Graniczne mówi, że ich sumaryczny rozkład powinien przypominać rozkład normalny. W związku z powyższym, bardzo często zakładamy (nie mając innego wyboru), że rozkład błędów jest właśnie rozkładem normalnym  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ .

Przyjrzyjmy się teraz wynikom uzyskanym podczas pomiarów na krętek M10, M12 i M14. Do analizy wykorzystane zostały biblioteki języka Python, które umożliwiają narysowanie histogramu oraz wyznaczenie najlepszego *dopasowania* danych pomiarowych do rozkładu normalnego o określonych parametrach. Na Rysunku 6.4 przedstawiono przykładowy program analizujący dane pomiarowe i przedstawiający

```

1 # Import bibliotek zewnętrznych.
2 from reliability.Fitters import Fit_Normal_2P
3 import matplotlib.pyplot as plt
4 import numpy as np
5
6 # Dane pomiarowe.
7 x = [16.77, 16.79, 16.76, 16.76, 16.79, 16.80, \
8     16.77, 16.75, 16.78, 16.79, 16.80, 16.76, \
9     16.78, 16.79, 16.80, 16.78, 16.77, 16.77, \
10    16.76, 16.77, 16.78, 16.80, 16.76, 16.77, \
11    16.78, 16.79, 16.77, 16.78, 16.79, 16.76]
12
13 # Najlepsze dopasowanie do rozkładu normalnego.
14 fit = Fit_Normal_2P(failures=x, method='LS', color='#396AB1', \
15                  linewidth=2.5)
16
17 plt.title('')
18 plt.xticks(size=12)
19 plt.yticks(size=12)
20 plt.ylabel('Odsetek przeanalizowanych', fontsize=20)
21 plt.xlabel('Wynik pomiaru', fontsize=20)
22 plt.legend(fontsize=16)
23 plt.savefig('pp.svg', pad_inches=0.1, bbox_inches="tight")
24
25 # Histogram.
26 fig, ax = plt.subplots()
27 ax.hist(x, bins=[16.745, 16.755, 16.765, 16.775, 16.785, 16.795, \
28         16.805], density=True, alpha=0.5, linewidth=4, color='#396AB1', \
29         edgecolor='white')
30 fit.distribution.PDF(label='PDF', color='#396AB1', linewidth=2.5)
31 plt.title('')
32 plt.ylabel('')
33 plt.xlabel('')
34 plt.savefig('hist.svg')
35

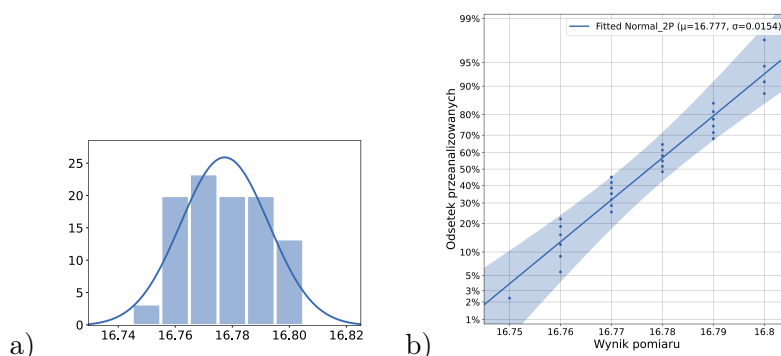
```

Rysunek 6.4: Kod programu do analizy statystycznej danych pomiarowych i rysowania wykresów prezentujących wyniki.

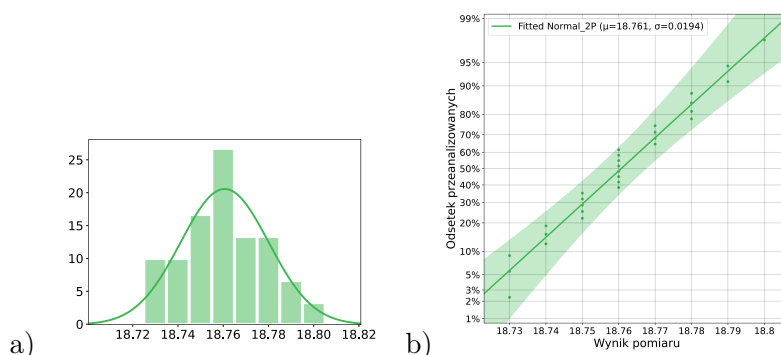
wyniki w formie wykresów.

Analiza danych dla nakrętki M10 wykazała, że najlepiej dopasowany do wyników jest rozkład normalny o parametrach  $\mu = 16.777$  i  $\sigma = 0.0154$ . Wykres rozkładu o takich parametrach został naniesiony na histogram prezentowany na Rysunku 6.5 a). Dopasowanie nie jest idealne, ale na Rysunku 6.5 b) widzimy, że wszystkie wyniki pomiarów mieszczą się w strefie dopuszczalnego błędu. Ponieważ poziom istotności badania został ustawiony na 5%, to możemy stwierdzić, że z prawdopodobieństwem 95% wartość średnia pomiaru wynosi 16.777, a błąd równy trzem odchyleniom standardowym wynosi  $\pm 0.0462$ . Warto w tym miejscu wspomnieć: dlaczego za błąd najczęściej przyjmujemy równowartość  $\pm 3\sigma$ ? Wynika to z faktu, że dla rozkładu normalnego 99.73% wyników znajduje się właśnie w obszarze  $\mu \pm 3\sigma$ .

Odpowiedni poziom dopasowania wykazują również pomiary wykonane dla nakrętki M12. Wykorzystane oprogramowanie wskazało, że najbardziej dopasowany do tych wyników jest rozkład normalny o parametrach  $\mu = 18.761$  i  $\sigma = 0.0194$ . Podobnie, jak w poprzednim przypadku, na Rysunku 6.6 a) przedstawiono histogram wraz z naniesionym rozkładem, a Rysunek 6.6 b) prezentuje poziom dopasowania wyników do rozkładu normalnego. Możemy zaobserwować, że również w tym przypadku, wszystkie wyniki znajdują się w strefie dopusz-



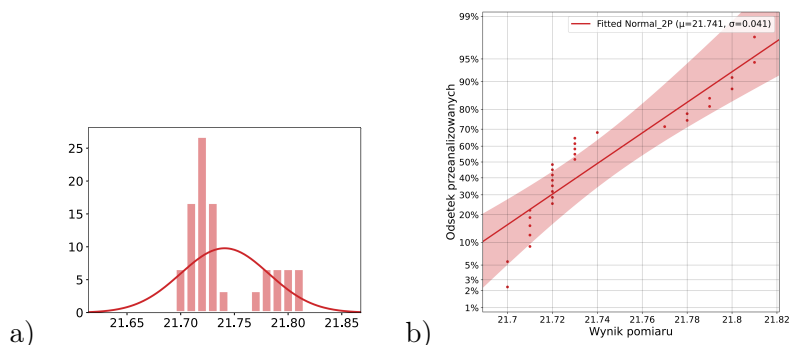
Rysunek 6.5: Wyniki analizy statystycznej danych pomiarowych dla nakrętki M10: a) histogram, b) wykres prawdopodobieństwa.



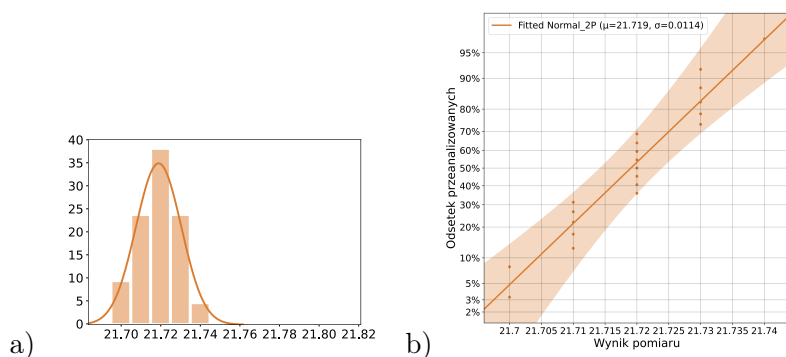
Rysunek 6.6: Wyniki analizy statystycznej danych pomiarowych dla nakrętki M12: a) histogram, b) wykres prawdopodobieństwa.

czalnego błędu. Zatem z prawdopodobieństwem 95% stwierdzamy, że wartość średnia wynosi 18.761, a błąd jest równy  $\pm 0.0582$ .

Z zupełnie odmienną sytuacją mamy do czynienia w przypadku pomiarów dla nakrętki M14. Wyniki zaprezentowane na Rysunku 6.7 pokazują znaczne odstępstwo od rozkładu normalnego. Widoczne jest to zarówno na histogramie, jak i na wykresie prawdopodobieństwa. Z wykresu b) wynika, że aż 9 z 30 pomiarów umieszczonych jest poza obszarem dopuszczalnego błędu. W takich sytuacjach należy podjąć decyzję o odrzuceniu hipotezy, że badane wyniki należą do rozkładu normalnego. Analiza histogramu wyraźnie wskazuje, że 9 wyników znacznie odstaje od pozostałych pomiarów. Jeżeli jednak przyjmujemy, że były to egzemplarze niepoprawnie wykonanych nakrętek, to otrzymamy rozkład, jak najbardziej zbliżony do rozkładu normalnego. Wyniki ana-



Rysunek 6.7: Wyniki analizy statystycznej danych pomiarowych dla nakrętki M14: a) histogram, b) wykres prawdopodobieństwa.



Rysunek 6.8: Wyniki analizy statystycznej danych pomiarowych dla nakrętki M14 po odrzuceniu 9 największych wartości: a) histogram, b) wykres prawdopodobieństwa.

lize danych po redukcji 9 największych wartości pomiarowych zostały zilustrowane na Rysunku 6.8. Powstaje jednak pytanie, dotyczące powodu odrzucenia pomiarów z próby. W niektórych przypadkach takie uzasadnienie jest sensowne, a w innych kompletnie niewłaściwe. W takich właśnie sytuacjach wchodzimy w obszar manipulacji danymi. Nigdy bowiem nie ma pewności, czy odrzucane pomiary są ewidentnym wynikiem jakiegoś *grubego* błędu pomiarowego, czy ich odrzucenie powodowane jest chęcią wpasowania wyników w określony rozkład prawdopodobieństwa.

**Ćwiczenie 6.3** Wykorzystaj przykładowy program do wykonania analiz dla własnych pomiarów. Do uruchomienia programu przygo-

owanego w języku Python możesz wykorzystać jedno z dostępnych środowisk (np. Anaconda – otwarte środowisko programistyczne dla języka Python dostępne nieodpłatnie na stronie [anaconda.com](https://anaconda.com) lub Google Colab – bezpłatne środowisko online). ■

## 6.5 Podsumowanie

W rozdziale przedstawione zostały podstawowe zagadnienia dotyczące analizy statystycznej danych pomiarowych. Poza takimi pojęciami, jak średnia arytmetyczna i odchylenie standardowe wprowadzono również podstawy analizy błędu pomiarowego. Dodatkowo zaprezentowano, jak za pomocą darmowych narzędzi dokonać bardziej skomplikowanych analiz – między innymi wyznaczenia parametrów rozkładu i weryfikacji hipotezy, czy analizowane dane świadczą o normalności rozkładu.

Rozdział ten ma być punktem wyjścia dla wszystkich uczniów, którzy chcieliby zgłębiać meandry statystycznej analizy danych. W dobie powszechnej informatyzacji i cyfryzacji naszego życia zagadnienia te są niezwykle istotne nie tylko dla fizyków. Zachęcamy więc do dalszego poszerzania wiedzy na temat zagadnień związanych z analizą danych.





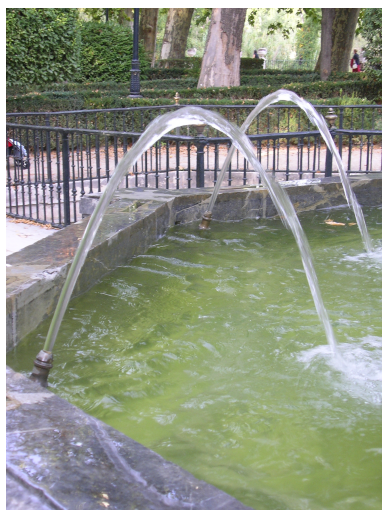
## 7. Czym jest modelowanie?

*Andrzej Chmielowiec*

### 7.1 Wstęp

Żyjemy w świecie, w którym wiele potrafimy przewidzieć i wyliczyć. Staramy się okiełznać otaczającą nas rzeczywistość i oprawić ją w określone ramy. Część z tych naszych działań kończy się powodzeniem. Potrafimy przewidzieć trajektorię ruchu rakiety, wykonać rzecz na podstawie rysunku, wyznaczyć miejsce pęknięcia belki poddanej obciążeniu, a nawet przeprowadzić symulację zderzenia samochodów. Wszystkie te czynności możliwe są dzięki umiejętności budowania odpowiednich modeli. Ciągłe jednak bardzo wiele zjawisk wymyka się naszym możliwościom poznawczym.

Starożytny filozof Platon uważał, że otaczający nas świat jest jedynie pewną, niedoskonałą projekcją świata idei. Wyznawał pogląd, że wszystko, co obserwujemy jest cieniem rzucanym przez idealne, abstrakcyjne byty. W tym kontekście można powiedzieć, że modelowanie jest poszukiwaniem właśnie tych abstrakcyjnych bytów, które odpowiadają określonym elementom rzeczywistości. Wyobraźmy sobie, że chcemy wykonać metalowy wałek, mający kształt walca. Przygotowujemy rysunek, który przedstawia jego rzuty, zawierające takie wymiary, jak średnica i wysokość. To jest właśnie nasz model – obraz idealnego elementu. Co jednak z naszej idei pozostanie w świecie fizycznym? To zależy od jakości wykonania. Niemniej jednak pod



Rysunek 7.1: Fontanny wyrzucające strumień wody ze stałą prędkością i pod określonym kątem [źródło: Wikipedia].

odpowiednim powiększeniem zobaczymy góry i doliny – całą masę nierówności wynikającą z procesu obróbki metalu.

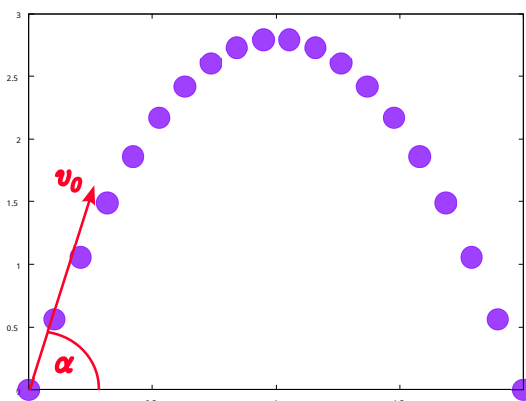
W tym rozdziale, na kilku przykładach, przedstawione zostanie zagadnienie modelowania zjawisk fizycznych przy użyciu pojęć matematycznych. Rozpocznemy od prostego przykładu, który będziemy komplikowali w kolejnych częściach.

## 7.2 Modelowanie rzutu ukośnego

Rozważmy sytuację, w której nadajemy ciało pewną prędkość początkową, skierowaną pod kątem  $\alpha$  do poziomu. Na lekcjach fizyki sytuacja ta nazywana jest rzutem ukośnym. Ciało o takiej prędkości początkowej unosi się, a po osiągnięciu pewnej wysokości maksymalnej zaczyna opadać. Pojawia się jednak pytanie: jaka jest trajektoria jego ruchu? Na Rysunku 7.1 przedstawiono fontannę, wyrzucającą strumień wody ze stałą prędkością i pod ustalonym kątem. Na zdjęciu możemy zobaczyć, w jaki kształt układają się cząsteczki wody. Kształt ten pokazuje trajektorię, która przypomina odwróconą parabolę. Dlaczego jednak tak się dzieje?

Powodem jest siła grawitacji, która w specyficzny sposób modyfikuje tor ruchu cząsteczek wody. Wyobraźmy sobie, że punkt materialny wyrzucono z prędkością początkową  $v_0$ , nachyloną pod kątem  $\alpha$  do





Rysunek 7.2: Rzut ukośny punktu materialnego z prędkością początkową  $v_0$ .

poziomu tak, jak to zostało zilustrowane na Rysunku 7.2. Jeżeli pominąć opory ruchu, to w poziomie punkt będzie poruszał się ruchem jednostajnym ze stałą prędkością  $v_0 \cos \alpha$ , a ruch w pionie będzie miał charakter ruchu jednostajnie opóźnionego. Jeżeli przez  $x$  oznaczymy położenie punktu w poziomie, a przez  $y$  położenie w pionie, to równania ruchu mają w tym przypadku postać:

$$\begin{aligned} x(t) &= (v_0 \cos \alpha)t, \\ y(t) &= (v_0 \sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2, \end{aligned}$$

gdzie  $g = 9.81 \text{ ms}^{-2}$  jest przyspieszeniem ziemskim przy powierzchni. Powyższe równania noszą nazwę równań parametrycznych, gdyż zadają trajektorię ruchu w zależności od parametru  $t$ , którym jest czas. Bez trudu jednak możemy wyeliminować z nich zmienną parametryczną, aby uzyskać wzór funkcji przedstawiającej trasę, po której porusza się punkt materialny. Wyznaczając  $t$  z pierwszego równania i podstawiając do drugiego otrzymujemy zależność:

$$y = \operatorname{tg} \alpha \cdot x - \frac{g}{2(v_0 \cos \alpha)^2} x^2.$$

Widzimy zatem ewidentnie, że trajektoria ruchu ma kształt odwróconej paraboli, który zależy od prędkości początkowej  $v_0$  oraz kąta jej nachylenia do poziomu  $\alpha$ .

**Ćwiczenie 7.1** Odkręć słuchawkę od węża prysznicowego i regulując ilość wypływającej cieczy oraz kąt, pod jakim wypływa, zobacz możliwe trajektorie ruchu cząsteczek wody. Czy istnieją sytuacje, w których wypływająca ciecz nie formuje odwróconej paraboli? ■

### 7.3 Rzut ukośny z oporem powietrza

Rozważany, w poprzedniej części, rzut ukośny nie uwzględniał sił oporów, na które napotyka poruszające się ciało. W przypadku strumienia cieczy może to być jak najbardziej uzasadnione, gdyż poruszające się cząsteczki znajdują się niejako w *tunelu*, do którego nie ma dostępu powietrze stanowiące opór. Jeśli jednak rozważać będziemy rzut piłką, to trajektoria ruchu nie będzie się już dawała opisywać za pomocą paraboli. Zasadniczym powodem jest opór jaki stawia powietrze, poruszającym się w nim obiektom. Okazuje się, że dla obiektu o zadanej średnicy, siła oporu powietrza jest proporcjonalna do prędkości lub do kwadratu prędkości.

Spróbujemy teraz poprawić model, który zastosowaliśmy w poprzedniej części, aby jego nowa wersja uwzględniała, w jakimś stopniu, opory ruchu. Do tej pory ustaliliśmy, że mamy możliwość wykorzystania dwóch wzorów na siłę oporu powietrza:

$$F_1 = k_1 \cdot v,$$

$$F_2 = k_2 \cdot v^2.$$

Zastosowanie jednego lub drugiego zależy od tego, czy powietrze opływa poruszający się obiekt w sposób laminarny, czy też turbulentny. Przez laminarny rozumiemy tutaj taki przepływ, w którym cząsteczki powietrza układają się w gładkie linie, po których następuje ich ruch. Taki przepływ jest przepływem bezwirowym. Z kolei przepływ turbulentny to taki, przy którym przepływające powietrze przepływa w sposób chaotyczny, tworząc zawirowania. Oba rodzaje przepływów zostały bardzo ładnie zilustrowane na Rysunku 7.3, który przedstawia dym, przechodzący od przepływu laminarnego w dolnej części obrazka do przepływu turbulentnego w jego górnej części. Jak można zauważyć przepływ staje się turbulentny w sposób nagły i nie ma tutaj specjalnie żadnego stanu pośredniego. Granicą, która ustala rodzaj przepływu jest wartość, tak zwanej liczby Reynoldsa. Jeżeli wartość tej liczby  $Re \leq 1000$ , to przyjmuje się, że przepływ powietrza jest laminarny i siła oporu dana jest wzorem  $F_1 = k_1 v$ . Jeśli z kolei  $Re > 1000$ , to przyjmujemy, że przepływ powietrza jest turbulentny i należy zastosować



Rysunek 7.3: Dym przechodzący od przepływu laminarnego (dolna część) do przepływu turbulentnego (górna część) [źródło: Wikipedia].

wzór  $F_2 = k_2 v^2$ . Skąd jednak mamy wiedzieć, z którym przypadkiem mamy do czynienia? Otóż okazuje się, że jeśli poruszającym obiektem jest sfera, to liczba Reynoldsa dana jest wzorem

$$\text{Re} = \frac{vD}{\nu},$$

gdzie  $v$  jest prędkością, z jaką powietrze opływa sferę,  $D$  jest jej średnicą, a  $\nu$  jest lepkością kinematyczną (w temperaturze  $25^\circ\text{C}$  wynosi ona  $1.562 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ ). Można zatem powiedzieć, że jeżeli iloczyn prędkości powietrza i średnicy sfery przekracza wartość  $0.01562 \text{ m}^2/\text{s}$ , to mamy do czynienia z przepływem turbulentnym i wykorzystujemy siłę  $F_2$ , a poniżej tej wartości stosujemy zależność na siłę  $F_1$ .

■ **Przykład 7.1** Przyjmijmy, że dysponujemy typową piłką nożną. Jej średnica powinna wynosić około  $22 \text{ cm} = 0.22 \text{ m}$ . Jeżeli taka piłka będzie poruszała się z prędkością powyżej  $7.1 \text{ cm/s}$ , to powinniśmy już zastosować wzór na siłę  $F_2$ . Widzimy zatem, że w tym przypadku prędkość jest tak niewielka, że jeśli będziemy rozważali kopanie takiej piłki, to możemy śmiało przyjąć wykorzystanie siły  $F_2$  dla każdej wartości prędkości. Oczywiście będzie to pewne uproszczenie, ale godzimy się na nie, gdyż popełniony błąd będzie w tym przypadku znikomy. Wynika to z faktu, że przez znaczną część rzutu piłka będzie miała większą prędkość niż te wymagane  $7.1 \text{ cm/s}$ . ■

Biorąc pod uwagę powyższy przykład, możemy próbować zapisać równanie ruchu dla piłki, która wykonuje rzut ukośny. W tym

przypadku nie mamy już jednak bezpośredniej możliwości zapisania współrzędnych  $x(t)$  oraz  $y(t)$ , jak poprzednio. Gdy pomijaliśmy opory, to ruch był bardzo prosty: jednostajny w poziomie i jednostajnie opóźniony w pionie. Teraz jednak pojawiła się siła, która jest proporcjonalna do kwadratu prędkości i przeciwnie skierowana do kierunku ruchu. To mocno komplikuje nasze zagadnienie, gdyż siła będzie zmienna w trakcie trwania ruchu. Skoro nie potrafimy bezpośrednio wyznaczyć współrzędnych, to zacznijmy od tego, co znamy – bilansu sił. W tym przypadku skorzystamy z drugiej zasady dynamiki Newtona, która mówi, że przyspieszenie ciała jest proporcjonalne do przyłożonej siły i odwrotnie proporcjonalne do jego masy. W związku z tym przyspieszenie wzdłuż osi  $x$  możemy wyrazić jako

$$a_x = -\frac{1}{m}F_x,$$

gdzie  $m$  jest masą ciała, a  $F_x$  jest poziomą składową siły oporu powietrza. Podobne równanie możemy zapisać dla ruchu w pionie. Tym razem, należy jednak do niego dodać siłę ciężkości

$$a_y = -g - \frac{1}{m}F_y.$$

Z naszych dotychczasowych ustaleń dotyczących siły oporu powietrza wiemy ponadto, że

$$\sqrt{F_x^2 + F_y^2} = kv^2,$$

gdzie  $v$  jest prędkością ciała, a  $k$  jest oporem powietrza, który zależy od kształtu ciała. Teraz skorzystajmy z faktu, że przyspieszenie jest pochodną prędkości po czasie. W związku z tym dla małych przyrostów  $\Delta$  możemy zapisać

$$\begin{aligned} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} &= -\frac{1}{m}F_x, \\ \frac{\Delta v_y}{\Delta t} &= -g - \frac{1}{m}F_y. \end{aligned}$$

Ponieważ siła oporu ma ten sam kierunek i przeciwny zwrot w stosunku do wektora prędkości, to jej składowe spełniają zależność  $\frac{F_x}{F_y} = \frac{v_x}{v_y}$ . Wykorzystując tę zależność jesteśmy w stanie wyznaczyć wartości  $F_x$  i  $F_y$ , które wynoszą odpowiednio  $F_x = kv_x^2$  i  $F_y = kv_y^2$ . Zauważmy w tym miejscu, że pozioma siła oporu  $F_x$  nie zmienia nigdy swojego kierunku. Natomiast kierunek siły  $F_y$  zmienia się na przeciwny, gdy

ciało zaczyna opadać. Aby uwzględnić ten fakt, należy napisać, że  $F_y = kv_y^2 \frac{v_y}{|v_y|}$ . Czynniki  $\frac{v_y}{|v_y|}$  ma bowiem taką własność, że jest równy 1 jeśli  $v_y$  jest dodatnie i zmienia wartość na  $-1$ , gdy  $v_y$  jest ujemne. W związku z powyższym, nasze równania ruchu po podstawieniu wyznaczonych wartości i pomnożeniu przez  $\Delta t$  przyjmują postać

$$\Delta v_x = \left( -\frac{k}{m} v_x^2 \right) \Delta t,$$

$$\Delta v_y = \left( -g - \frac{k}{m} \frac{v_y}{|v_y|} v_y^2 \right) \Delta t = \left( -g - \frac{k}{m} v_y \cdot |v_y| \right) \Delta t.$$

Jeśli przyrosty czasu  $\Delta t$  będą dążyły do zera, to otrzymamy równania różniczkowe, których rozwiązaniami są pozioma i pionowa składowa prędkości. Nie będziemy jednak z takiego podejścia korzystali, gdyż analityczne rozwiązanie, postawionego w ten sposób problemu, wymaga znajomości rachunku całkowego. Zamiast tego, przeprowadzimy symulację numeryczną z wykorzystaniem arkusza kalkulacyjnego. Zanim jednak do tego przejdziemy, konieczne są równania, które definiują nam trajektorię. W tym przypadku wykorzystamy fakt, że droga jest pochodną prędkości po czasie, co możemy przedstawić jako

$$\Delta x = v_x \Delta t,$$

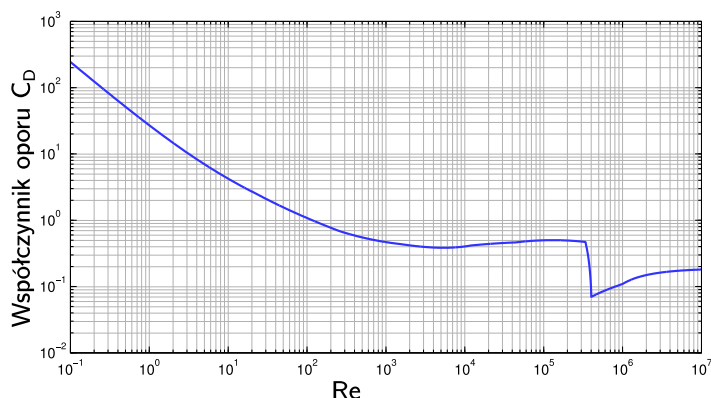
$$\Delta y = v_y \Delta t.$$

Z przedstawionych zależności wyłania się następująca procedura numeryczna:

1. Określamy wartości początkowe prędkości i położenia oraz numeryczną wielkość pozostałych parametrów pojawiających się w równaniach.
2. Przyjmujemy pewną niewielką wartość  $\Delta t$ .
3. Wyznaczamy przyrosty prędkości  $\Delta v_x$ ,  $\Delta v_y$ ,  $\Delta x$  i  $\Delta y$  na podstawie danych z poprzedniego kroku.
4. Modyfikujemy wartości  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $x$  i  $y$  o wyznaczone przyrosty i przechodzimy do kolejnego kroku symulacji (przechodzimy do kroku 2 niniejszej procedury).

Podstawą symulacji numerycznej jest liczbowa znajomość wszystkich wielkości występujących we wzorach. O ile wiadomo, że  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ , piłkę można zważyć, a prędkość początkową założyć, to jak dotąd nie powiedzieliśmy nic o wartości oporu powietrza  $k$ . Okazuje się, że dość dobrze opisuje go następujący wzór

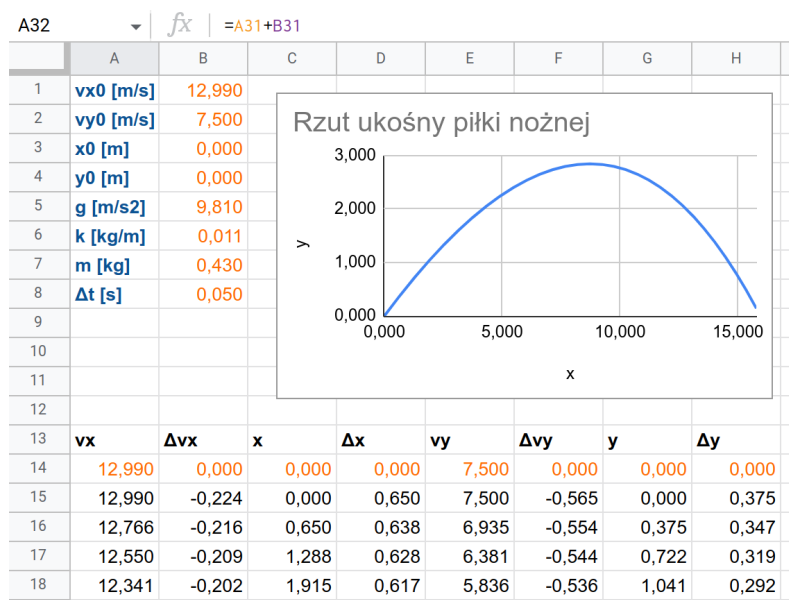
$$k = \frac{1}{2} \rho \cdot C_D \cdot A,$$



Rysunek 7.4: Wielkość współczynnika oporu w funkcji liczby Reynoldsa [źródło: Wikipedia].

w którym  $\rho$  jest gęstością ośrodka otaczającego poruszające się ciało,  $A$  jest powierzchnią przekroju ciała, a  $C_D$  jest bezwymiarowym współczynnikiem oporu, zależnym od liczby Reynoldsa. Dokładny wykres wielkości  $C_D$  przedstawiony został na Rysunku 7.4. Dla analizowanej przez nas, we wcześniejszym przykładzie, piłki nożnej można przyjąć, że jest on stały podczas całego ruchu i wynosi 0.5. Ponieważ piłka będzie poruszać się w powietrzu, to przyjmujemy  $\rho = 1.2 \text{ kg/m}^3$ , a pole przekroju piłki o średnicy 22 cm wynosi  $A = \pi(0.11)^2 = 0.038 \text{ m}^2$ . Przyjęte dane numeryczne pozwalają na wyliczenie wartości oporu powietrza  $k = 0.0114 \text{ kg/m}$ . Ponadto, na potrzeby naszej analizy zakładamy, że masa piłki wynosi  $m = 0.43 \text{ kg}$ , jej prędkość początkowa to  $v_0 = 15 \text{ m/s}$ , kąt nachylenia wektora prędkości początkowej do poziomu to  $30^\circ$  (oznacza to, że  $v_{x,0} = 12.99 \text{ m/s}$  i  $v_{y,0} = 7.5 \text{ m/s}$ ), a ruch rozpoczyna się w punkcie  $x_0 = 0$  i  $y_0 = 0$ . Wprowadźmy teraz dane numeryczne do arkusza tak, jak to zostało pokazane na Rysunku 7.5. Wartości oznaczone na pomarańczowo są wartościami początkowymi lub parametrami określającymi piłkę. Właściwa symulacja rozpoczyna się od wiersza numer 15 i trwa do momentu, w którym współrzędna  $y$  osiąga wartości nieujemne. Formuły określone dla procesu symulacji są następujące:

- A15 = A14+B14,
- B15 =  $-(\frac{B6}{B7}) * A15 * A15 * B8$ ,
- C15 = C14+D14,
- D15 = A15\*B8,
- E15 = E14+F14,



Rysunek 7.5: Fragment arkusza kalkulacyjnego pozwalający na numeryczną symulację rzutu ukośnego z uwzględnieniem oporów powietrza.

- $F15 = (-B5 - B6 / B7 * E15 * ABS(E15)) * B8$ ,
- $G15 = G14 + H14$ ,
- $H15 = E15 * B8$ .

Przeprowadzona symulacja pokazuje nam, że jeśli kopniemy piłkę nożną pod kątem  $30^\circ$  z prędkością początkową 15 m/s, to wzniesie się ona na około 3 m oraz upadnie około 16 m dalej.

**Ćwiczenie 7.2** Przeprowadź własną symulację dla rzutu ukośnego piłki nożnej. Zobacz, jak zmienia się tor ruchu piłki w sytuacji zmiany kąta i wartości prędkości początkowej. Spróbuj uzyskać dokładniejszy wykres poprzez zmniejszenie wartości  $\Delta t$ . Co stanie się, gdy wartość  $\Delta t$  zwiększy się do 0.1 lub nawet 0.5 s? Jak będzie wyglądała trajektoria ruchu, jeżeli opór powietrza  $k$  wzrośnie czterokrotnie (piłka będzie miała 2 razy większą średnicę)? Co się stanie gdy opór powietrza  $k$  zmaleje do zera? ■

**Ćwiczenie 7.3** Określ wszystkie parametry dla piłki tenisowej i przeprowadź symulację numeryczną dla prędkości początkowych wynoszących około 50 m/s. ■

## 7.4 Podsumowanie

W niniejszym rozdziale przedstawiony został proces podejścia do modelowania matematycznego, na przykładzie rzutu ukośnego. Wybrane przykłady mają pokazywać, że wynik modelowania jest mocno zależny od pewnych uproszczeń, które przyjmujemy. W niektórych przypadkach mogą okazać się one trafne, a w innych doprowadzają do nieścisłości. Na przykład pominięcie oporów ruchu było bardzo sensowne dla strumienia wody. Z kolei pominięcie ich dla ruchu piłki nożnej w powietrzu było uproszczeniem, które daje wynik odbiegający od tego, co będzie się działo w rzeczywistości.

W dobie komputerów posiadających coraz większą moc obliczeniową, modelowanie zjawisk fizycznych zyskuje coraz większe znaczenie. Wynika to z faktu, że eksperyment numeryczny jest znacznie tańszy, niż przeprowadzenie rzeczywistego doświadczenia. Dlatego też, przy projektowaniu maszyn, w pierwszej kolejności symulujemy zachowanie odpowiednich elementów konstrukcyjnych, a dopiero później budujemy prototyp do testów. Bardzo często już na etapie numerycznego symulowania modelu okazuje się bowiem, że konieczne są określone poprawki. Dzięki takiemu podejściu mamy możliwość szybszej realizacji projektu, przy jednoczesnej minimalizacji kosztów związanych z budową i badaniem prototypów.





## 8. Drgania, fale i analiza Fouriera

Weronika Woś

### 8.1 Wstęp

Ruch drgający to jeden z najpowszechniejszych ruchów w przyrodzie. Drgają atomy w nas i w całej otaczającej nas materii, drgają struny głosowe ludzi lub zwierząt wydających dźwięk, drgają membrany głośników. Ponadto okazuje się, że każdy ruch drgający można przedstawić jako złożenie (sumę) skończonej lub nieskończonej liczby drgań harmoniczných.

W tym rozdziale przedstawione zostaną podstawowe pojęcia związane z ruchem okresowym. Wyjaśnimy również pojęcia, takie jak: analiza harmoniczna, okres, częstotliwość czy amplituda i omówimy krótko zjawisko energii w ruchu harmonicznym. Nieco szerzej zostanie opisane rozbicie funkcji okresowych na sumę harmoniczných. Natomiast ostatnia część rozdziału przedstawia tak zwany algorytm FFT.

### 8.2 Ruch okresowy

W codziennym życiu, często można spotkać ruchy powtarzalne, czyli takie, gdzie ciało przemieszcza się tam i z powrotem, wracając co jakiś czas do tego samego punktu. Przykłady takich ruchów to:

- ruch huśtawki,
- drganie struny w instrumencie muzycznym,

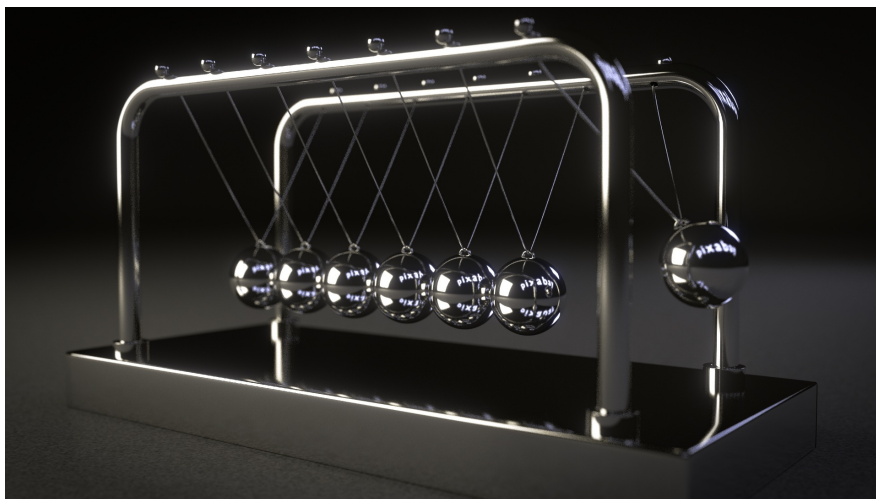
- ciężarek poruszający się na sprężynie,
- drgania szyby obok ruchliwej ulicy.

Taki rodzaj ruchu nazywa się ruchem okresowym.

**Definicja 8.1 — Ruch okresowy.** Ruch, w którym wielkości charakterystyczne dla tego ruchu, np. prędkość czy przyspieszenie, powtarzają się po upływie stałego przedziału czasu  $T$ , nazywa się **ruchem okresowym (harmonicznym, drgającym, oscylacyjnym, cyklicznym)**.

Drgania często dotyczą okresowych zmian innych wielkości, niż położenie ciała, na przykład ciśnienia lub napięcia elektrycznego.

Jeśli drga cząstka ośrodka sprężystego, to drgania te przenoszą się na kolejne cząstki i w ośrodku rozchodzi się fala. W tym rozdziale omówione będą tylko fale w ośrodkach sprężystych. Należy jednak pamiętać, że takimi samymi równaniami można opisać wiele zjawisk falowych: od fal rozchodzących się w strunie, poprzez fale dźwiękowe, aż do całej klasy fal elektromagnetycznych. W istocie każda poruszająca się cząstka jest falą, tak więc równanie falowe spełnia fundamentalną rolę w opisie świata.



Rysunek 8.1: Wahadło Newtona jest ciekawym przykładem ruchu okresowego

■ **Przykład 8.1** Ciekawym przykładem ruchu okresowego jest kołysanie się kulek, w tak zwanym wahadle Newtona. Jest ono zbudowane w ten sposób, że na sznurkach zawieszonych jest 5 stykających się ze

sobą stalowych kulek, które mogą wykonywać wahania tylko w jednej, wspólnej płaszczyźnie. Gdy jedna z nich zostanie odchyłona i puszczona, jej uderzenie w pozostałe kulki spowoduje, że po przeciwnej stronie szeregu odskoczy tylko ostatnia kulka, a pozostałe pozostaną nieruchome. Wychylenie odskakującej kulki będzie prawie takie samo jak pierwszej. ■

Ruch punktu materialnego nazywa się ruchem harmonicznym, jeśli punkt porusza się pod wpływem siły  $F$ , o wartości wprost proporcjonalnej do wychylenia z położenia równowagi  $x$  i skierowanej przeciwnie do wychylenia. O zwrocie siły mówi znak minus we wzorze

$$F = -k x,$$

gdzie  $k$  jest współczynnikiem proporcjonalności. Jeżeli siłę harmoniczną podstawimy się do równania wyrażającego II zasadę dynamiki Newtona

$$F = m a,$$

gdzie  $m$  jest to masa ciała, a  $a = \frac{d^2x}{dt^2}$  jest przyspieszeniem, to otrzyma się następujące równanie

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -k x. \quad (8.1)$$

Jest to równanie różniczkowe zwyczajne drugiego rzędu z niewiadomą funkcją  $x$ . Szukaną funkcją (rozwiązaniem tego równania) jest taka funkcja, której druga pochodna ma tę samą postać, co sama funkcja  $x$  z przeciwnym znakiem (z dokładnością do stałej). Funkcjami takim są sinus i cosinus. Te funkcje trygonometryczne nazywa się **funkcjami harmonicznymi**, a opis ruchu okresowego przy ich pomocy jest to analiza harmoniczna.

**Definicja 8.2 — Analiza harmoniczna.** Opis ruchu okresowego przy pomocy funkcji trygonometrycznych sinus i cosinus nazywa się **analizą harmoniczną**.

Rzeczywiście równanie (8.1) jest spełnione przez funkcję

$$x(t) = A \cos(\omega \cdot t + \varphi),$$

gdzie  $A$ ,  $\omega$ ,  $\varphi$  są dowolnymi parametrami. Poniżej przedstawiono pierwszą pochodną (prędkość) oraz drugą pochodną  $x$  po czasie  $t$

(przyspieszenie).

$$\frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega \cdot t + \varphi) \quad \text{prędkość}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega \cdot t + \varphi) \quad \text{przyspieszenie}$$

Po podstawieniu do równania 8.1 uzyskuje się równanie:

$$m \cdot (-\omega^2 A \cos(\omega \cdot t + \varphi)) = -k \cdot A \cos(\omega \cdot t + \varphi).$$

Funkcja  $x(t) = A \cos(\omega \cdot t + \varphi)$  spełnia równanie ruchu pod warunkiem, że stała  $\omega$  spełnia związek:

$$m \omega^2 = k. \quad (8.2)$$

**Definicja 8.3** Stałą  $\omega$  nazywa się **częstością** drgań własnych. Argument funkcji cosinus ( $\omega \cdot t + \varphi$ ) to **faza ruchu**, stała  $\varphi$  stanowi **fazę początkową** w chwili  $t = 0$ . Największe wychylenie z położenia równowagi  $A$  nazywa się **amplitudą drgań**.

### 8.3 Okresowość drgań

Na początku należy przypomnieć, że funkcje sinus i cosinus są okresowe. To znaczy, że dla pewnej stałej  $T_0$ , zwanej okresem tych funkcji, wartości funkcji dla argumentu  $x + T_0$  są takie same jak dla argumentu  $x$ . Jeżeli istnieje najmniejszy dodatni okres, to nazywa się go okresem podstawowym. Okresem podstawowym funkcji sinus i cosinus jest  $2\pi$ , tzn.:

$$\cos(\alpha + 2\pi) = \cos \alpha.$$

Ruch oscylacyjny ma tę własność, że po upływie pewnego czasu  $T$  zwanego **okresem** ruchu, ciało znów jest w tej samej fazie.

Przy założeniu, że  $\omega T = 2\pi$ , oraz korzystając z okresowości funkcji cosinus otrzymuje się, że:

$$\begin{aligned} x(t + T) &= A \cos(\omega \cdot (t + T) + \varphi) = A \cos(\omega t + \omega T + \varphi) \\ &= A \cos((\omega t + \varphi) + \omega T) = A \cos(\omega t + \varphi) = x(t). \end{aligned}$$

**Twierdzenie 8.1** Okres ruchu  $T$  jest powiązany z częstością  $\omega$  w następujący sposób

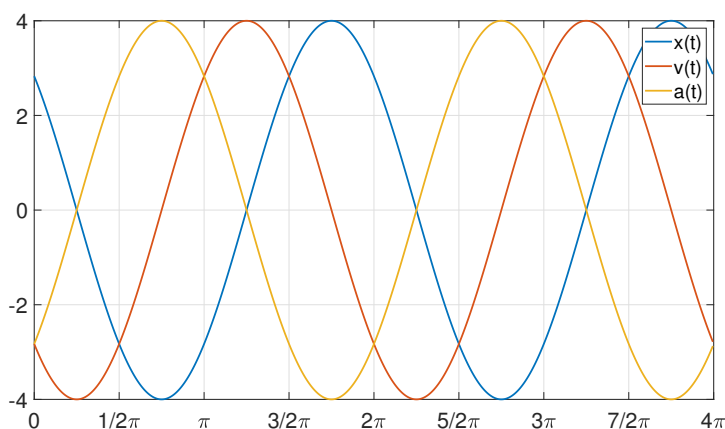
$$\omega T = 2\pi \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

**Definicja 8.4** Odwrotność okresu  $T$ , czyli liczbę drgań w jednostce czasu nazywa się **częstotliwością** i oznacza się  $\nu$ . Jednostką częstotliwości jest hertz:  $1\text{Hz} = 1\text{s}^{-1}$ .

**Twierdzenie 8.2** Częstotliwość  $\nu$  i częstość  $\omega$  są powiązane zależnościami

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad \omega = 2\pi\nu$$

Rysunek 8.2 przedstawia funkcje położenia  $x(t)$ , prędkości  $v(t)$  oraz przyspieszenia  $a(t)$  od czasu w ruchu oscylacyjnym (przy założeniu, że  $\omega = 1$ ,  $A = 4$  oraz  $\varphi = \pi/4$ ). W momentach, gdy wychylenie z położenia równowagi jest maksymalne  $x = A$ , prędkość jest równa zero, natomiast przyspieszenie ma wartość maksymalną, a znak przeciwny do wychylenia. Gdy drgające ciało znajduje się w położeniu równowagi  $x = 0$ , przyspieszenie jest zerowe, a prędkość maksymalna.



Rysunek 8.2: Zależność położenia, prędkości i przyspieszenia od czasu w ruchu harmonicznym

## 8.4 Energia w ruchu harmonicznym

Ciało wychylone z położenia równowagi, na które działa siła harmoniczna, ma pewną **energię potencjalną**  $E_p$ .

**Definicja 8.5 — Energia potencjalna.** Energia, jaką ma ciało (lub układ ciał) w zależności od położenia ciała (układu ciał) w przestrzeni, jest to **energia potencjalna**, oznaczana jako  $E_p$ .

Energię tę można wyznaczyć, obliczając pracę, jaką należy wykonać, aby przesunąć ciało z położenia równowagi,  $x = 0$  do punktu o danym położeniu. Zmiana energii potencjalnej  $dE_p$  jest równa pracy, jaką wykonuje siła równoważąca siłę harmoniczną na drodze  $dx$ .

$$dE_p = -F(x) dx,$$

gdzie  $F(x) = -kx$ . Zatem

$$dE_p = kx dx.$$

Po obliczeniu całki

$$E_p(x) = \int_0^x k s ds$$

otrzymuje się wzór na energię potencjalną ciała wychylonego z położenia równowagi o  $x$ :

$$E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2.$$

**Twierdzenie 8.3** Ciało w ruchu harmonicznym ma energię potencjalną, którą można wyrazić wzorem

$$E_p(t) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi).$$

Ponadto ciało w ruchu drgającym ma energię związaną z ruchem jego masy. Jest to **energia kinetyczna**, oznaczana  $E_k$ . W opisywanych przez mechanikę klasyczną układach, może dochodzić do przemian energii kinetycznej w energię potencjalną i odwrotnie.

**Definicja 8.6 — Energia kinetyczna.** Energia ciała związaną z ruchem jego masy jest to **energia kinetyczna**, oznaczana  $E_k$ .

Wzór na energię kinetyczną w ruchu harmonicznym oblicza się, podstawiając do wzoru na energię kinetyczną

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

prędkość w postaci

$$v = -\omega A \sin(\omega t + \varphi)$$

otrzymując

$$E_k = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi).$$

Ponadto korzystając z zależności (8.2) otrzymuje się następujący wzór:

$$E_k = \frac{1}{2}k A^2 \sin^2(\omega t + \varphi).$$

**Twierdzenie 8.4** Ciało w ruchu harmonicznym ma energię kinetyczną, którą można wyrazić wzorem

$$E_k = \frac{1}{2}k A^2 \sin^2(\omega t + \varphi).$$

**Energia całkowita** ciała poruszającego się ruchem oscylacyjnym to suma energii potencjalnej i kinetycznej.

$$\begin{aligned} E &= E_p + E_k = \frac{1}{2}k A^2 \cos^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2}k A^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \\ &= \frac{1}{2}k A^2 (\cos^2(\omega t + \varphi) + \sin^2(\omega t + \varphi)) = \frac{1}{2}k A^2. \end{aligned}$$

Jak łatwo zauważyć, we wzorze na energię całkowitą znikło wyrażenie zależne od czasu. Oznacza to, że energia całkowita w ruchu harmonicznym nie zależy od czasu – jest w każdej chwili taka sama. Inaczej mówiąc, energia całkowita jest zachowana. Zmieniają się natomiast energie: kinetyczna i potencjalna. Zachodzi to w ten sposób, że gdy jedna z nich rośnie, to druga maleje tak, że suma pozostaje stała.

## 8.5 Szereg Fouriera

Często spotykanym zadaniem jest aproksymacja funkcji  $x(t)$ . Zadanie to polega na przybliżeniu funkcji  $x(t)$  w innej, zazwyczaj prostszej,

postaci  $\phi(t)$ . Bardzo często mówi się o tak zwanej aproksymacji wielomianowej, gdzie szukana funkcja  $\phi(t)$  jest wielomianem. Jeśli jednak funkcja  $x(t)$  jest okresowa, to wówczas do jej aproksymacji lepiej użyć wielomianów trygonometrycznych, tj. rozwinąć funkcję w **szereg trygonometryczny Fouriera**.

**Twierdzenie 8.5** Jeżeli funkcja  $x(t)$  jest **okresowa** to można ją rozwinąć w **szereg trygonometryczny Fouriera** dany wzorem:

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ A_k \cos(k\omega t) + B_k \sin(k\omega t) \right],$$

gdzie:

$k$  to rząd harmoniczej,

$A_0$  to składowa stała,

$A_k, B_k$  to amplitudy,

$\omega = 2\pi f$  to pulsacja harmoniczej podstawowej (częstość).

Zatem szereg Fouriera rozkłada funkcję okresową na sumę funkcji trygonometrycznych. W ogólnym przypadku szereg Fouriera zawiera nieskończenie wiele harmoniczych (składowych sumy szeregu). W praktyce jednak większość harmoniczych maleje do zera, gdy zwiększa się rząd tych harmoniczych. Dlatego też w obliczeniach uwzględnia się kilka początkowych składowych, uzyskując przy tym zadowalające przybliżenie.

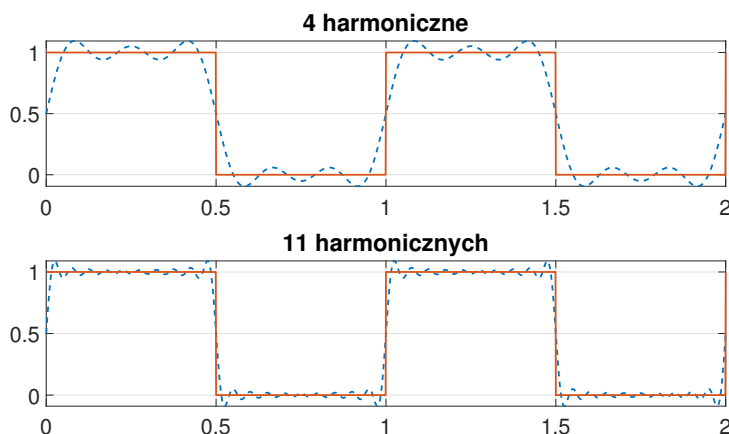
■ **Przykład 8.2** Dany jest sygnał prostokątny następującym wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } (n, 0, 5 + n) \\ 1/2 & \text{dla } 0, 5 + n \\ 0 & \text{dla } (0, 5 + n, n + 1) \end{cases},$$

gdzie  $n \in \mathbb{Z}$ .

Rysunek 8.3 przedstawia wykres tego sygnału oraz jego przybliżenia szeregami Fouriera odpowiednio przez 4 i 11 pierwszych harmoniczych. Łatwo zaobserwować, że każde zwiększenie liczby harmoniczych w rozwinięciu w szereg Fouriera zwiększa dokładność odwzorowania sygnału.





Rysunek 8.3: Reprezentacja sygnału prostokątnego przez sumę harmonicznych

■

Często postać trygonometryczna szeregu Fouriera nie jest wystarczająca, dlatego wprowadza się **postać wykładniczą szeregu Fouriera**. Korzystając ze wzorów Eulera i dokonując przekształceń otrzyma się zależność:

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{ik\omega t},$$

gdzie współczynniki  $X_k$  rozwinięcia są liczbami zespolonymi. Wykres  $|X_k|$  nazywany jest **widmem amplitudowym** sygnału  $x(t)$ , jest on symetryczny względem osi pionowej. Z kolei wykres  $\arg X_{-k} = -\arg X_k$  jest nazywany **widmem fazowym** i jest symetryczny względem początku układu współrzędnych.

## 8.6 Transformacja Fouriera

Szereg Fouriera odnosi się tylko do sygnałów okresowych. Uogólnieniem szeregu, na przypadek sygnałów nieokresowych, jest **transformacja Fouriera**.

**Definicja 8.7** Transformacja Fouriera jest dana wzorem:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt. \quad (8.3)$$

Jest to transformacja sygnału ciągłego, oznaczana CTFT (Continuous Time Fourier Transform).

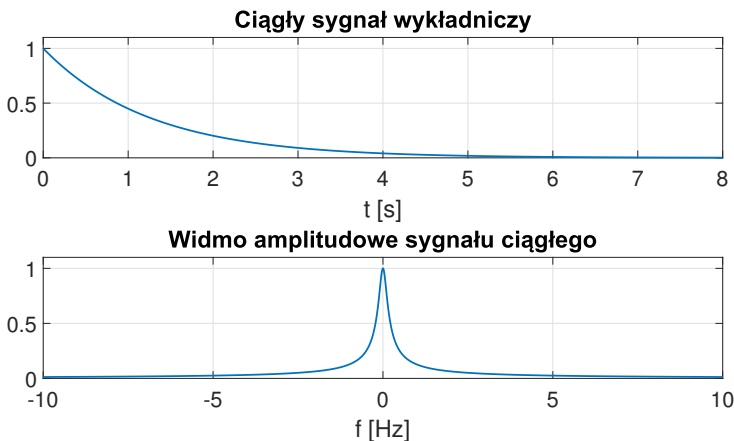
■ **Przykład 8.3** Niech będzie dany sygnał wykładniczy opisany funkcją ciągłą

$$x(t) = e^{-0,8t}.$$

Transformacja Fouriera tej funkcji obliczona zgodnie ze wzorem (8.3) wynosi

$$X(\omega) = 1/(0,8 + i\omega).$$

Rysunek 8.4 ilustruje wykres tego sygnału w dziedzinie czasu oraz widmo amplitudowe tego sygnału.



Rysunek 8.4: Ciągły sygnał wykładniczy i widmo amplitudowe tego sygnału

Transformacja CTFT zakłada, że sygnał jest ciągły. W praktyce jednak, w większości spotyka się z próbkami dyskretnymi sygnału.

Transformację takiego sygnału oznacza się DTFT (Discrete Time Fourier Transform). Definicja tego przekształcenia wynika wprost z definicji transformacji ciągłej przez zastąpienie czasu ciągłego dyskretnymi próbkami, a całkowanie przez sumowanie.

**Definicja 8.8** Transformacja DTFT opisana jest wzorem:

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-i\omega nT}. \quad (8.4)$$

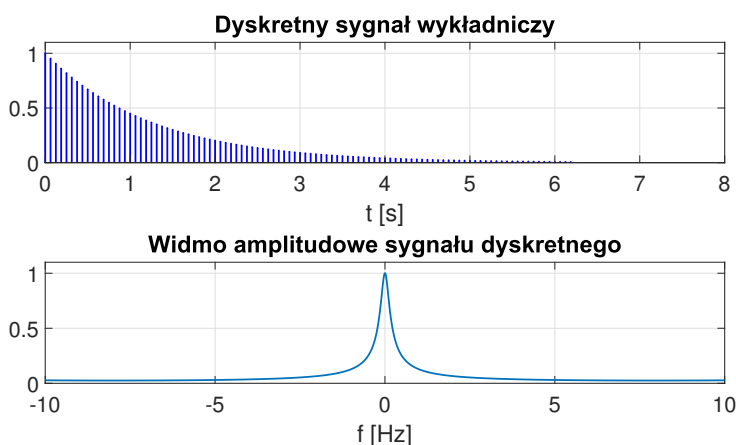
■ **Przykład 8.4** Ciągła funkcja wykładnicza opisana w Przykładzie 8.3 ma reprezentację dyskretną

$$x(n) = e^{-0,8T_s n}.$$

Wtedy widmo sygnału spróbkowanego obliczone zgodnie ze wzorem (8.4) opisuje wyrażenie

$$X(\omega) = 1/(1 - e^{-0,8T_s - i2\pi f T_s}).$$

Rysunek 8.5 przedstawia wykres tego sygnału i jego widma. Wynik transformaty Fouriera sygnału spróbkowanego odzwierciedla przebieg charakterystyki częstotliwościowej sygnału ciągłego.



Rysunek 8.5: Dyskretny sygnał wykładniczy i widmo amplitudowe tego sygnału

Transformacja Fouriera omówiona do tej pory przetwarza sygnał wejściowy ciągły lub dyskretny w reprezentację częstotliwościową ciągłą. W analizie cyfrowej pożądana jest postać dyskretna wyniku. Rozwiązaniem tego problemu jest dyskretyzacja wyników DTFT. Tę rolę pełni **dyskretna transformacja Fouriera DFT** (Discrete Fourier Transform).

**Definicja 8.9** Dla sygnału dyskretnego  $x(n)$  **dyskretna transformacja Fouriera DFT** przyjmuje postać

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_n^{kn}, \quad (8.5)$$

gdzie

$$W_N = e^{-i2\pi/N} = \cos(2\pi/N) - i \sin(2\pi/N).$$

Przekształcenie DFT jest zdyskretyzowanym po częstotliwości wynikiem przekształcenia Fouriera ciągu dyskretnego. Główną zaletą DFT jest zastąpienie obliczeń z użyciem typu ciągłego, operacjami mnożenia i sumowania na wartościach dyskretnych, które są łatwe do zaprogramowania na komputerze. Użycie dyskretnej transformaty Fouriera, w porównaniu do ciągłego przekształcenia Fouriera, niesie za sobą szereg możliwości. Współczesne systemy pomiarowe są urządzeniami cyfrowymi, a zatem sygnał zmierzony przy ich pomocy przyjmuje wartości dyskretne.

## 8.7 Algorytm FFT

Transformacja zdefiniowana wzorem (8.5) wymaga wykonania dużej liczby operacji matematycznych. Mając bardzo dużą liczbę próbek pomiarowych, oznacza to istotne ograniczenie jej zastosowania. Istnieje jednak algorytm szybkiego obliczania dyskretnej transformaty Fouriera, który optymalizuje DFT, zwany **szybką transformatą Fouriera FFT** (Fast Fourier Transform). Za pomocą transformaty Fouriera, a w praktyce za pomocą **algorytmu FFT**, przekształca się sygnał z dziedziny czasu do dziedziny częstotliwości.

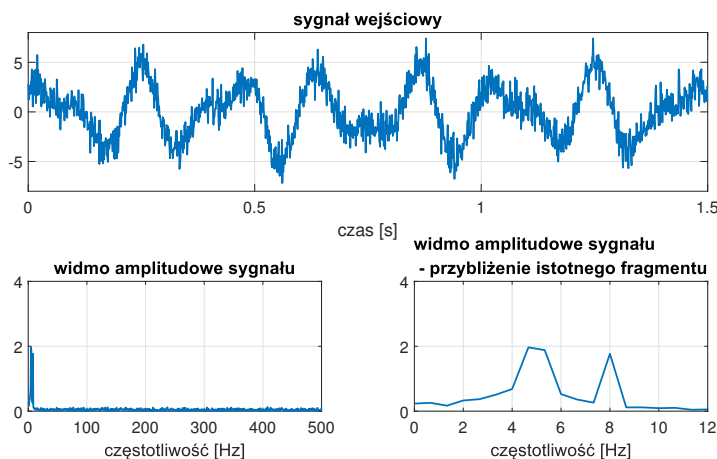
W wyniku transformaty otrzymuje się informację o amplitudzie i fazie poszczególnych składowych częstotliwościowych. Wśród zalet FFT można wymienić, między innymi możliwość zastosowania do programów procesorów sygnałowych, czy programów matematycznych. Dzięki temu szybka transformata Fouriera jest obecnie najbardziej

popularną operacją przetwarzania sygnałów.

■ **Przykład 8.5** Niech będzie dany sygnał wyrażony funkcją

$$f(x) = 3 \sin(2\pi 5t) + 2 \cos(2\pi 8t),$$

do którego został dodany szum losowy. Częstotliwości występujące w funkcji oryginalnej to 5 Hz i 8 Hz. Rysunek 8.6 przedstawia ten sygnał oraz jego szybką transformatę Fouriera FFT. Częstotliwości występujące w funkcji oryginalnej to 5 Hz i 8 Hz. Pierwszy wykres przedstawia oryginalny sygnał. Wykres w drugim wierszu od lewej prezentuje cały wynik analizy FFT. Można zaobserwować istotne częstotliwości na początku wykresu, następnie reszta widma jest bliska zera. Trzeci wykres jest przybliżeniem początkowego fragmentu drugiego wykresu i uwidacznia częstotliwości istotne. Jak widać, analiza FFT bardzo dobrze odzwierciedla istotne częstotliwości. Na trzecim wykresie występuje znaczne wzniesienie krzywej między 4 Hz a 6 Hz, co odpowiada częstotliwości 5 Hz. Ponadto występuje bardzo wyraźne ekstremum w 8 Hz. Zatem analiza FFT dała bardzo dokładne wyniki na mocno zaszumionym sygnale.



Rysunek 8.6: Zaszumiony sygnał oryginalny i jego transformata FFT

■



Projekt pt.: „**MODELOWE ROZWIĄZANIA NA TRUDNE WYZWANIA - Plan Rozwoju Lokalnego i Instytucjonalnego Stalowej Woli**”, o wartości 15 328 498,86 zł, realizowany jest w ramach Programu Rozwój Lokalny. Projekt dofinansowany został ze środków Norweskiego Mechanizmu Finansowego 2014-2021 (85%) oraz ze środków Budżetu Państwa (15%). Projekt ma na celu poprawę rozwoju lokalnego i instytucjonalnego Stalowej Woli. Projektem zarządza Lider – Gmina Stalowa Wola.

Wspólnie działamy na rzecz Europy **zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej.**  
[www.norwaygrants.pl](http://www.norwaygrants.pl) i [www.norwaygrants.org](http://www.norwaygrants.org)

## Fundusze norweskie

Fundusze norweskie reprezentują wkład Norwegii w tworzenie Europy zielonej, konkurencyjnej i sprzyjającej integracji społecznej. W ramach funduszy norweskich Norwegia przyczynia się do ograniczenia nierówności społecznych i ekonomicznych oraz wzmocnienia relacji dwustronnych z państwami beneficjentami z Europy Środkowej i Południowej oraz obszaru Morza Bałtyckiego. Norwegia ściśle współpracuje z UE w ramach Porozumienia o Europejskim Obszarze Gospodarczym (EOG). Wraz z pozostałymi darczyńcami, Norwegia przekazała 3,3 miliarda euro w ramach kolejnych programów funduszy w latach 1994–2014. Fundusze norweskie są finansowane wyłącznie przez Norwegię i dostępne w państwach, które przystąpiły do UE po 2003 r. Fundusze norweskie na lata 2014-2021 wynoszą 1,25 miliarda euro. Priorytety na ten okres to:

- innowacje, badania naukowe, edukacja, konkurencyjność i godna praca;
- integracja społeczna, zatrudnienie młodzieży i ograniczenie ubóstwa;
- środowisko, energia, zmiany klimatu i gospodarka niskoemisyjna;
- kultura, społeczeństwo obywatelskie, dobre zarządzanie i podstawowe prawa;
- sprawiedliwość i sprawy wewnętrzne.

